高等数学第一、二章测试题

（用时：90 分钟）

一、选择题（每题 4 分，共 16 分）

1. 设 $x \to 0$ 时，$e^{x\cos x^2} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n =$（　）。

   (A) 5　　(B) 4　　(C) $\frac{5}{2}$　　(D) 2

2. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$，则（　）。

   (A) $x = 0, 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

   (B) $x = 0, 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

   (C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

   (D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$，则下列结论正确的是（　）。

   (A) $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 2$

   (B) $f(0) = 2$ 且 $f'(0) = 0$

   (C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导

   (D) 以上都不正确

4. 设函数 $f(x) = |x^2 - 1|$，则 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上不可导点的个数为（　）。

   (A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

二、填空题（每题 4 分，共 16 分）

5. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$，则 $a =$ _____，$b =$ _____。

6. 曲线 $y = x^x + \sqrt{5 - x^2}$，则在 $x = 1$ 处的法线方程为 _____。

7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f(1)=2$，$f'(1)=-1$，则

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=_____$$

8. $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=_____$。

三、解答题（共 68 分）

9.（30 分）求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n+5^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{\sin^n x}$ $(m,n$ 为正整数$)$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}$

10.（8 分）求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$。

11.（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，$f(0)=0$, $f(1)=1$。证明：

(a) 存在 $c\in(0,1)$ 使 $f(c)=1-2c$;

(b) 存在 $\xi\in[0,2]$ 使 $2f(0)+f(1)+3f(2)=6f(\xi)$。

12.（10 分）参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

13.（10 分）$y=e^x(x^2+2x+2)$，求 $y^{(20)}$。

参考答案

一、选择题

1. **A**

2. **D**

3. **A**

4. **C**

二、填空题

5. $a=1,\ b=-1$。

6. $y=-2x+5$。

7. -1。

8. $e^{-\frac{1}{2}}$

三、解答题

9. (1) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}=\frac{1}{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+1/x^2}+1}=\infty;\end{aligned}$$

从而，原极限不存在。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n+5^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(-\frac{3}{5}\right)^n+1}{(-3)\left(-\frac{3}{5}\right)^n+5}=\dfrac{1}{5}.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^m)}{\sin^n x}$ $(m,n$ 为正整数$)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^m}{x^n}=\begin{cases}0, & m>n\\ 1, & m=n\\ \infty, & m<n\end{cases}.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\dfrac{1}{2}.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(-2x^2)\right]^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{[1+(-x^2)]^{1/2}-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\frac{1}{2}(-x^2)}}=e^{-4}$.

10. 解：注意到

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\text{原式}<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即

$$\frac{n(n+1)/2}{n^2+2n}<\text{原式}<\frac{n(n+1)/2}{n^2+n+1}.$$

两边极限均为 $\frac{1}{2}$，故原极限为 $\frac{1}{2}$。

11. 证：(1) 令 $F(x)=f(x)+2x-1$，则 $F(0)=-1$, $F(1)=2$，由零点定理得证。

(2) 由介值定理，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，则

$$6m\le 2f(0)+f(1)+3f(2)\le 6M\Rightarrow m\le\frac{2f(0)+f(1)+3f(2)}{6}\le M,$$

故存在 ξ 使 $f(\xi)=\frac{2f(0)+f(1)+3f(2)}{6}$。

12. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+t^2}{4t}$

13. **解**：设 $u=e^x$，$v=x^2+2x+2$，则

$$u^{(20)}=u^{(19)}=u^{(18)}=e^x,\quad v'=2x+2,\quad v''=2.$$

由莱布尼茨公式，

$$y^{(20)}=u^{(20)}v+20u^{(19)}v'+\frac{20\times 19}{2}u^{(18)}v''=e^x\left[(x^2+2x+2)+20(2x+2)+190\times 2\right]$$

$$=e^x(x^2+42x+422).$$