安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY



1. 只需加入1群，不要再加2群；
2. 以“专业班级姓名”方式命名群成员；
3. 请勿讨论与课程无关的问题。

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

高等数学(上)

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

第1章 函数、极限与连续

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§1 函数

安徽理工大学

一、函数的定义

定义 设有变量x, y和非空数集D, 若对任一 $x \in D$，y 按一定法则 f，总有唯一确定的数值与之对应，则称y是x的函数，记为$y=f(x)$。

(1) 以上定义的仅为单值函数，即“每个$x \in D \xrightarrow{f}$唯一y”。

(2) 函数完全由定义域D和函数关

安徽理工大学

系 f 这两要素确定。

例1 下列各式中的y是否为x的函数？说明理由。

(1) $y=\sqrt{-x^2}$；

(2) $y=1/\sqrt{-x^2}$；

(3) $y=2$；

(4) $x=1$；

(5) $y^2=x$。

安徽理工大学

解 (1) 是，即 $y=0, D=\{x=0\}$；

(2) 否，$D=\varnothing$；

(3) 是；

(4) 否，因为与x对应的y不唯一；

(5) 否，因为与x对应的y不唯一。

例2 下列各对函数是否相同？

(1) $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=x/x,\ g(x)=1$；

安徽理工大学

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x,$

$g(x)=1$。

解 (1) 否，因f不同；

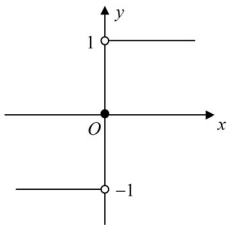
(2) 否，因 D 不同；

(3) 是，因D与f均相同。

例3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

安徽理工大学



(1) 在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数。

安徽理工大学

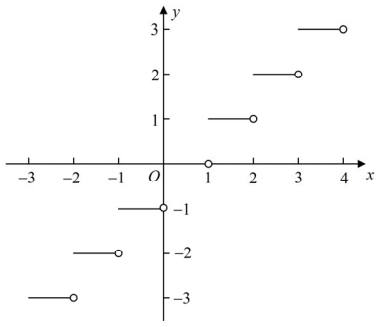
(2) 分段函数是一个而不是几个函数。

例4 取整函数 $y=[x]$。

$[x]$表示不超过x的最大整数。例如，$[0.3]=0,\ [-\pi]=-4$。

取整函数的图形如下：

安徽理工大学



安徽理工大学

二、函数的几种初等特性

1. 有界性

函数有界性有下列两种等价定义：

定义1 若有$M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M,\ x\in D$$

则称f在D上有界。

定义2 若有M_1, M_2，使

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2,\ x\in D$$

则称 f 在 D 上有界。

M_1 和 M_2 分别称为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界和上界。

若对任意给定的正数 M，总存在 $x_0 \in D$，使 $|f(x_0)| > M$，则称 $f(x)$ 在 D 上无界。

例5 证明 $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ 在 $(0,1)$ 内无界。

解 对任意 $M>0$，取

$$x_0=\frac{1}{M+1}\in(0,1)$$

则 $|f(x_0)|=\dfrac{1}{\sin x_0}>\dfrac{1}{x_0}=M+1>M$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界。

2. 单调性

定义 设 $x_1, x_2 \in$ 区间 I，若当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)\ \big(f(x_1)>f(x_2)\big)$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(减少)。

(1) 这里定义的是严格单调性；

(2) 单调性通常用导数判定。

3. 奇偶性

定义 设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数或偶函数。

(1) 奇(偶)函数的图形关于原点(y 轴)对称；

(2) 按奇偶性分类，函数可分为

- 奇
- 偶
- 非奇非偶
- 既奇又偶　$f(x)=0$ (唯一)

例6 证明：定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证 设 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 上的任意函数，

$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，且 $\varphi(x)$ 为奇函数，$\psi(x)$ 为偶函数，则

$$f(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)$$
$$=-\varphi(x)+\psi(x)$$

解得 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

$$\psi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

从而若令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$\psi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

则显然 $\varphi(x)$为奇函数，$\psi(x)$为偶函数且 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$。

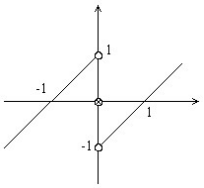
例7 判断

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x<0\end{cases}$$

的奇偶性，并做出 $f(x)$的图形。

解 $f(-x)=\begin{cases}-x-1, & -x>0\\ 0, & -x=0\\ -x+1, & -x<0\end{cases}$

$$=-\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}=-f(x)$$



即 $f(x)$为奇函数。

4. 周期性

定义 若有 $T\neq 0$，使

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$是周期为 T 的周期函数。

通常 T 指最小正周期，但有些周期函数无最小正周期。例如，狄里克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$$

以任何有理数为周期，但无最小正周期。

三、反函数与复合函数

1. 反函数

对 $y=f(x)$，给定y，若总有唯一确定的x与之对应，则x也是y的函数，称为$y=f(x)$的反函数，记为 $x=\varphi(y)$ 或 $y=\varphi(x)$。

函数与其反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称。

例8 求函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\,(ad-bc\neq 0)$$

的反函数，并问a,b,c,d 满足什么条件时，反函数与直接函数相同。

解 反函数为 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$。令

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-dx}{cx-a}$$

即

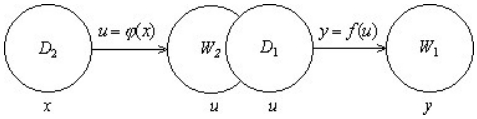
$$(a+d)\left[cx^2-(a-d)x-b\right]\equiv 0$$

得 $a=-d$ 或 $a=d\neq 0$，且 $b=c=0$。

2. 复合函数

对若 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，值域为 W_1，$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，且 W_2(全部或部分) $\subset D_1$，则通过中间变量 u，y 也是 x 的函数，称

为复合函数，记为 $y=f\left[\varphi(x)\right]$。



例如，$y=\sqrt{u},u=1-e^x$ 可复合成 $y=\sqrt{1-e^x}$，而 $y=\ln u,u=\arctan x$ $-\pi$ 不能复合。

例9 设

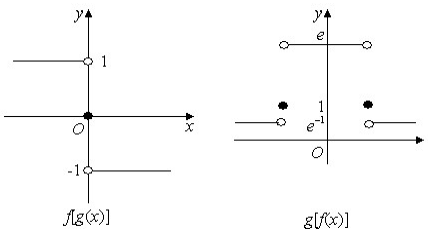
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases},\quad g(x)=e^x$$

求 $f\left[g(x)\right]$ 和 $g\left[f(x)\right]$，并做出这两个函数的图形。

解 $f\left[g(x)\right]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1\\ 0, & |g(x)|=1\\ -1, & |g(x)|>1\end{cases}$

$$=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

$$g\left[f(x)\right]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$



四、初等函数

1. 基本初等函数

下列五种函数称为基本初等函数:

(1) 幂函数 $y=x^{\mu},\mu\in R$

(2) 指数函数

$y=a^x$ $(y=e^x, e=2.71828\cdots)$

(3) 对数函数

$y=\log_a x$ $(y=\log_e x=\ln x)$

(4) 三角函数

$\sin x, \cos x, \tan x,$

$\cot x, \sec x, \csc x$

(5) 反三角函数

$\arcsin x, \arccos x,$

$\arctan x, \operatorname{arccot} x$

注 $y = 3x^2 + 2$, $y = \sin 2x$ 不是基本初等函数。

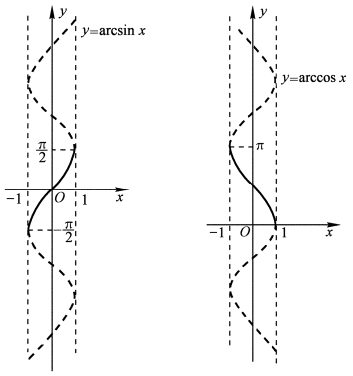
(反)三角函数常用性质、公式与图形

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x};$$

$$1 + \tan^2 x \equiv \sec^2 x, 1 + \cot^2 x \equiv \csc^2 x;$$

$$y = \arcsin x, \ x \in [-1,1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x, \ x \in [-1,1], y \in [0, \pi];$$

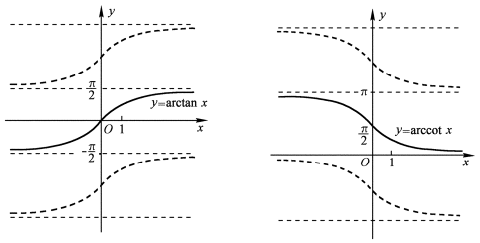


$$y = \arctan x, x \in (-\infty, +\infty), y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arccot} x, x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, \pi);$$

$$|\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \ 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

$$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}, \ 0 < \operatorname{arccot} x < \pi;$$



$$\arcsin x + \arccos x \equiv \frac{\pi}{2};$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x \equiv \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)];$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)];$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)];$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)];$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

2. 初等函数

由基本初等函数和常数经有限次四则运算和有限次复合而成，并可由一个式子表示的函数称为初等函数。

注 分段函数一般不是初等函数，但也有例外，如$y=|x|=\sqrt{x^2}$是初等函数。

3. 双曲函数与反双曲函数

(1) 双曲正弦

$$y=\mathrm{sh}x=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

(2) 双曲余弦

$$y=\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

(3) 双曲正切

$$y=\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$$

(4) 反双曲正弦

$$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

(5) 反双曲余弦

$$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

(6) 反双曲正切

$$y=\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

五、参数方程与极坐标

1. 函数的参数方程

有时，直接表示y与x的函数关系较为复杂。此时，可引入参数t，通过t间接表示y与x的函数关系，即

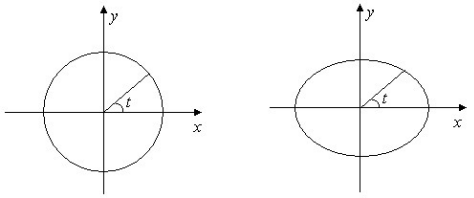
$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t\in[a,b]$$

称之为函数的参数方程。

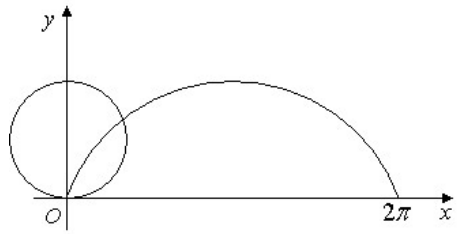
例如，

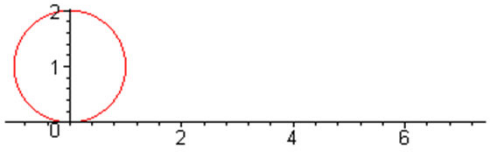
(1) 圆 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$

(2) 椭圆 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$



(3) 摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

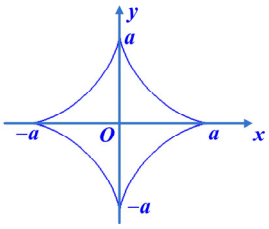


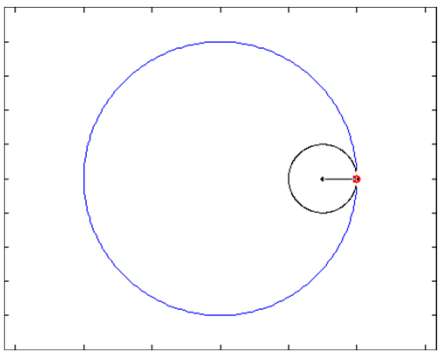


(4) 星形线(内摆线)

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

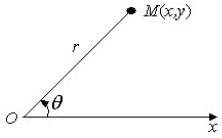
$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$$





2. 极坐标

如图，r,θ 称为点 M 的极坐标，r 称为极径，θ 称为极角。



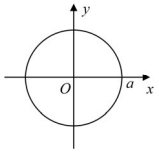
极坐标与直角坐标的相互关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = y/x \end{cases}$$

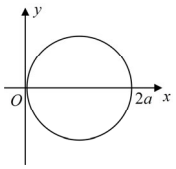
常见的极坐标方程有：

(1) 圆

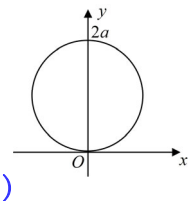
$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ r=a \end{cases}$$



$$\begin{cases} (x-a)^2+y^2=a^2 \\ r=2a\cos\theta \end{cases}$$

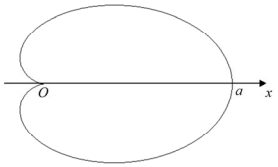


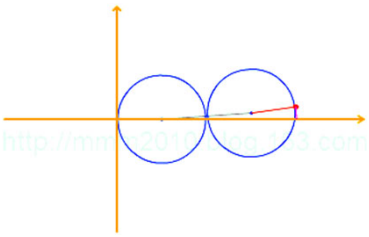
$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=a^2 \\ r=2a\sin\theta \end{cases}$$



(2) 心脏线(外摆线)

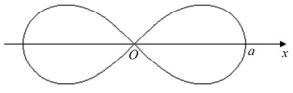
$$r=a(1+\cos\theta)$$





(3) 双纽线

$$r^2=a^2\cos 2\theta$$



安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§2 数列极限

一、数列极限的定义

1. 引例

考察数列 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限。

解 $\{x_n\}:2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{10001}{10000},\cdots\to 1$

$x_n\to 1\Leftrightarrow n\to\infty$ 时，x_n 无限接近于1 $\Leftrightarrow$ 当 n 充分大时，$|x_n-1|=1/n$ 可以

任意小 $\Leftrightarrow$ 任给正数 ε (无论它多么小)，总可找到一个正整数 N，使得对满足 $n>N$ 的所有 x_n，均有 $|x_n-1|<\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，此时可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$。

例如，$\varepsilon=0.01$, $N=100$;

$\varepsilon=0.001$, $N=1000$.

2. $\varepsilon-N$ 定义

定义 对任意给定的正数 ε，若总存在正整数 N，使得对满足 $n>N$ 的所有 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 均成立，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a\ (n\to\infty)$，否则称数列 $\{x_n\}$ 无极限或发散。

上述定义称为数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义，可简记为如下四句话：

“对任意 $\varepsilon>0$，若存在 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$”，则 $x_n\to a$。

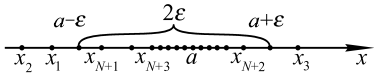
(1) ε {任意 / 固定}　(2) N {与 ε 有关 / 不唯一}

(3) 关键点：N 的存在性；

(4) 出发点：$|x_n-a|<\varepsilon$。

3. $\varepsilon-N$ 定义的几何解释

记 $U(a,\varepsilon)=\{x\,||x-a|<\varepsilon\}$，则 $\varepsilon-N$ 定义可表述为“对任意 $\varepsilon>0$，若存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n\in U(a,\varepsilon)$，则 $x_n\to a$”，即“邻域 $U(a,\varepsilon)$ 外最多只有 N 个点”。



例10 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$。

证 第一步：由 $|x_n-a|<\varepsilon$ 确定 N。

$$|x_n-1|=\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$

第二步：完整地写出 $\varepsilon-N$ 定义

的四句话。

对任意 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $|x_n-1|<\varepsilon$ 成立，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

例11 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{4}=0$。

证 $|x_n-0|=\frac{1}{n}\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|\overset{\text{放大}}{\leqslant}\frac{1}{n}<\varepsilon$

$n>\frac{1}{\varepsilon}$，可取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$|x_n-0|<\varepsilon$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{4}=0$$

例12 证明 $\lim_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n}=1$。

证 $\left|\underbrace{0.999\cdots9}_{n}-1\right|=\left|\left(1-\frac{1}{10^n}\right)-1\right|$

$$=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$$

$10^n>\frac{1}{\varepsilon}, n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$，可取 $N=\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，$\left|\underbrace{0.999\cdots9}_{n}-1\right|<\varepsilon$，故

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n}=1$$

二、收敛数列的性质

定理1 收敛数列的极限唯一。

证 设 $x_n\to a, x_n\to b$，且 $a<b$，根据极限定义，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\begin{cases}N_1\\N_2\end{cases}$，当 $\begin{cases}n>N_1\\n>N_2\end{cases}$ 时，$\begin{cases}|x_n-a|<\varepsilon\\|x_n-b|<\varepsilon\end{cases}$，即

$$\begin{cases}a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon\\b-\varepsilon<x_n<b+\varepsilon\end{cases}$$

取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$，则其变为

$$\begin{cases}\frac{3a-b}{2}<x_n<\frac{a+b}{2}\\\frac{a+b}{2}<x_n<\frac{3b-a}{2}\end{cases}$$

若取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，上述两不等式应同时成立，矛盾，故得证。

安徽理工大学

定义 若存在 $M>0$，对所有x_n均满足$|x_n|\leqslant M$，则称数列$\{x_n\}$有界。

定理2 收敛的数列有界。

证 设$x_n\to a$，由极限定义，对任意 $\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$，从而 $|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant |x_n-a|+|a|<\varepsilon+|a|$

安徽理工大学

令 $M=\max\{|x_1|,\cdots,|x_N|,\varepsilon+|a|\}$，则对任意$n$，$|x_n|\leqslant M$，即数列$\{x_n\}$有界。

注 有界的数列不一定收敛。例如，$x_n=(-1)^n$ 有界，但没有极限。

定义 在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持其先后次序，这样得到的数列称为原数列的一个子数列。

安徽理工大学

例如，数列 $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$有两个子数列$\{x_{2n}\}=\{1,\cdots,1,\cdots\}$和 $\{x_{2n-1}\}=\{-1,\cdots,-1,\cdots\}$。

定理3 数列$\{x_n\}$收敛于 $a\Leftrightarrow$ 数列$\{x_n\}$的任一子数列均收敛于a。

推论 若数列$\{x_n\}$的两个子数列收敛于不同的极限，则数列$\{x_n\}$发散。

例如，对 $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$，$x_{2n}\to 1$

安徽理工大学

而 $x_{2n-1}\to -1$，故数列$\{x_n\}$发散。

例13 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=|a|$$

并举例说明反之不成立。

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，由极限定义得：

对任意 $\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，$|u_n-a|<\varepsilon$。

安徽理工大学

由 $\big||u_n|-|a|\big|\leqslant|u_n-a|$ 得：

对任意 $\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，$\big||u_n|-|a|\big|<\varepsilon$。

由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$。

反之不成立，例如$u_n=(-1)^n$，$a=1$，显然有$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$，但$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq a$.

安徽理工大学

例14 设数列$\{x_n\}$有界，且

$$\lim_{n\to\infty}y_n=0$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$。

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，由极限定义得：

对任意 $\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，$|y_n-0|=|y_n|<\varepsilon$。

又数列有界，即有$M>0$，使$|x_n|$

$\leqslant M$，从而$|x_n y_n| \leqslant M\varepsilon = \varepsilon' (n > N)$,
故任意 $\varepsilon' > 0$，存在N，当$n > N$时，

$$|x_n y_n| = |x_n y_n - 0| < \varepsilon'$$

由极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

(1) 因ε为任意正数, 从而$\varepsilon' = M\varepsilon$也为任意正数；

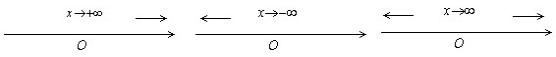
(2) 本题极易误证为

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§3 函数极限

一、 $x \to \infty$ (无限值)时的极限



定义 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在$X > 0$, 当$|x| > X$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称A为当 $x \to \infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

或 $f(x) \to A\ (x \to \infty)$ 。

例15 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$。

证 $|f(x) - A| = \dfrac{1}{\sqrt[3]{|x|}} < \varepsilon$

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon^3} = X$$

对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $X = \dfrac{1}{\varepsilon^3}$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - 0| < \varepsilon$，故

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

定义 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 当 $x > X\ (x < -X)$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \right)$$

例16 证明：$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$。

证 $|f(x) - A| = \dfrac{|\sin x|}{|x|} \leqslant \dfrac{1}{-x} < \varepsilon$

$$x < -\frac{1}{\varepsilon}, X = \frac{1}{\varepsilon}$$

对任意 $\varepsilon > 0$，存在$X = \dfrac{1}{\varepsilon}$，当$x < -X$时，有 $|f(x) - 0| < \varepsilon$，故

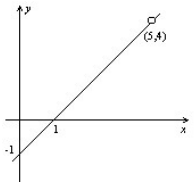
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

二、 $x \to x_0$ (有限值)时的极限

1. 引例

考查 $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$ 当 $x \to 5$ 时的极限。

如图，当 $x \to 5$ 时，$f(x) \to 4$ 。



事实上，$|f(x)-4|=$

$$\left|\frac{x^2-6x+5}{x-5}-4\right|=|x-5|$$

当 $|x-5|$ 任意小时，$|f(x)-4|$ 也任意地小。

2. $\varepsilon-\delta$ 定义

定义 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x) \to A\ (x \to x_0)$。

注 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 有无极限、极限为何值与 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义、定义值为何值无关。

例17 证明 $\lim\limits_{x \to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}=4$。

证 第一步：由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 推出 $|x-x_0|<\delta$，从而确定 δ。

$$|f(x)-4|=\left|\frac{x^2-6x+5}{x-5}-4\right|<\varepsilon$$

即 $|x-5|<\varepsilon$，得 $\delta=\varepsilon$。

第二步：写出定义中的四句话。

对 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-5|<\delta$ 时，有 $|f(x)-4|<\varepsilon$，故

$$\lim_{x \to 5}\frac{x^2-6x+5}{x-5}=4$$

例18 证明：$\lim\limits_{x \to -2}(4x-1)=-9$。

证 由 $|f(x)-(-9)|=|(4x-1)-(-9)|$

$=4|x-(-2)|<\varepsilon$ 得 $|x-(-2)|<\dfrac{\varepsilon}{4}$

即可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$。

对任意 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$，则当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-(-9)|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x \to -2}(4x-1)=-9$。

三、函数的单侧极限

定理4 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

推论 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 至少有一个不存在或都存在但不相等，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在。

例19 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$。

证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

定义 若当x从左边趋于x_0时，$f(x)\to A$，则称A为$f(x)$当$x\to x_0$时的

左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$或$f(x_0-0)=A$。

同理可定义右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$。

定理5 $f(x)$当$x\to x_0$时的极限存在的充要条件是左右极限存在且相等，即

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

推论 若左右极限至少有一个不存在或都存在但不相等，则极限不存在。

例20 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$。

解 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1,$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$

故极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

四、函数极限的性质

1. 局部保号性

定理6 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$ $(A<0)$，则在x_0的某一去心邻域内$f(x)>0\,(f(x)<0)$。

证 因 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，由极限定义：

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当$0<$

$|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，即

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

取 $\varepsilon=A$，即得 $f(x)>0$ 。

2. 局部有界性

定理7 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界。

证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，即对任意 $\varepsilon>0$,

存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

内有界。

安徽理工大學
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§4 无穷小与无穷大

一、无穷小

1. 定义

若在某极限过程中，一数列或函数的极限为零，则称此数列或函数在该极限过程中为无穷小。

例如，$\frac{1}{n}(n\to\infty)$，$x^2\ (x\to 0)$，

$$\frac{1}{x-1}(x\to\infty)$$

均为无穷小。

注 无穷小绝不是很小的数，0是无穷小中唯一的数。

2. 无穷小与极限的关系

定理8 $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为无穷小。

证 $\lim f(x)=A\Leftrightarrow \lim[f(x)-A]=0\Leftrightarrow f(x)-A=\alpha$为无穷小。

2. 无穷小的性质

(1)有限个无穷小的和仍为无穷小；

(2)有限个无穷小的积仍为无穷小；

(3)常数与无穷小的积仍为无穷小；

(4)有界函数与无穷小的积仍为

无穷小。

例21 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ 。

误解 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$

$=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$

注 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

解 当 $x\to 0$ 时，x 为无穷小，而 $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界，故 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 仍为无穷小，即

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

例22 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$。

解 $x\to\infty,\dfrac{1}{x}\to 0,|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$

故 $\dfrac{\arctan x}{x}$ 仍为无穷小，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$$

二、无穷大

1. 定义

若对任意$M>0$，存在$\delta>0(X>0)$，使得当$0<|x-x_0|<\delta\ (|x|>X)$时，有$|f(x)|>M$，即当 $x\to x_0\ (x\to\infty)$

时，$|f(x)|$无限增大，则称$f(x)$当$x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\ \left(\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)$$

类似地可定义 $\lim f(x)=\pm\infty$ 。

注 (1) 无穷大不是很大的数；

(2)不要混淆无穷大量与无界函数这两个不同概念。

例23 证明：函数 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 却不是无穷大。

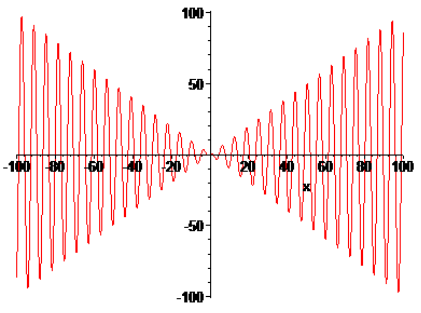
证 对于任意$M>0$，显然存在

$x_0=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),|k|>M/\pi$

则$|f(x_0)|=|k|\pi>M$，故$f(x)$无界。

类似地, 对于任意给定的$M>0$及$X>0$，存在$x_0=k\pi+\pi/2>X$，使得

$|f(x_0)|=0<M$, 故$f(x)$不是无穷大。



2. 无穷小与无穷大的关系

定理9 若$f(x)\neq 0$，则在同一极限过程中，$f(x)$为无穷小

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}\text{为无穷大}$$

§5 极限运算法则

1. 四则运算法则与复合运算法则

定理10 若

$$\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$$

则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=$

$$\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=$$

$$\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)$$

推论 (1) $\lim[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim f(x)$

(2) $\lim[f(x)]^{\alpha}=[\lim f(x)]^{\alpha}$

注 (1) 只有极限$\lim f(x),\lim g(x)$存在时，上述运算法则才成立；

(2) 上述法则可推广到有限项，但对无限项不成立。

例24 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$。

误解 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

$$=0+0+\cdots+0=0$$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}$。

定理11 若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a,\ \lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$。

切记，只有当$\lim f(x),\lim g(x)$均存在，才有

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=[\lim f(x)]^{\lim g(x)}$$

安徽理工大学

2. 两类简单极限

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$

$$=\begin{cases}\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}\text{(代入)}, & Q(x_0)\neq 0\\ \infty, & Q(x_0)=0,\ P(x_0)\neq 0\\ \text{化简后讨论}, & P(x_0)=Q(x_0)=0\end{cases}$$

安徽理工大学

例如，

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{2^2+5}{2-3}=-9$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{3}$$

安徽理工大学

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_m x^m+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+\cdots+b_1x+b_0}$

$$=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}$$

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/n^2}{1+1/n}=1$

安徽理工大学

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}=0$$

例25 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

安徽理工大学

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & x=1\\ \text{不存在}, & x=-1\\ \infty, & |x|>1\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{(-2)\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3}=\frac{1}{3}$$

安徽理工大学

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n!)\left(\dfrac{n^2-1}{3n^3+2}\right)$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{3n^3+2}=0$，$\sin(n!)$ 有界，故 $\sin(n!)\left(\dfrac{n^2-1}{3n^3+2}\right)$ 仍为无穷小，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n!)\left(\dfrac{n^2-1}{3n^3+2}\right)=0$。

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§6 极限存在法则与两个重要极限

1. 夹逼准则

定理12 若 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ (某项起)，且 $\lim x_n = \lim z_n = A$，则

$$\lim y_n = A$$

例26 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

解 计算“和式的极限”时首先考虑的方法应该是“夹逼准则”。

将待求极限的数列放缩得

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

即 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$

$$+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

例27 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$

解 本题为另一类用夹逼准则计算的典型极限。

由 $\sqrt[n]{2^n+3^n} = 3\sqrt[n]{1+(2/3)^n}$ 得

$$3 < \sqrt[n]{2^n+3^n} < 3\cdot 2^{\frac{1}{n}} \to 3$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$。

注 由本题可得下列一般结论:

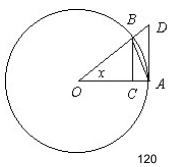
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\ (a_i>0)$$

$$=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$$

2. 第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

如图，$S_{\Delta AOB} < S_{\text{扇形}AOB}$

$$< S_{\Delta AOD}$$



即 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$

得 $\sin x < x < \tan x, \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$。

又 $0 \leqslant 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \to 0$

由夹逼性，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

注 此极限应理解为

$$\frac{\sin(\text{无穷小})}{\text{该无穷小}} \to 1$$

3. 单调有界准则

定理13 单调有界数列必有极限或 $\begin{cases}\text{单调上升有上界}\\ \text{单调下降有下界}\end{cases}$ 的数列必有极限。

注 讨论用递推公式定义的数列的极限时，应考虑单调有界准则。

例28 求数列

$$\sqrt{1}, \sqrt{1+\sqrt{1}}, \cdots, \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n}, \cdots$$

的极限。

解 令 $x_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}_{n}$，则

$x_n = \sqrt{1+x_{n-1}}$。

$x_1 = 1, x_2 = \sqrt{2}, x_1 < x_2$，不妨设 $x_{n-1} < x_n$，则 $x_n - x_{n+1} = \sqrt{1+x_{n-1}} -$

$\sqrt{1+x_n} < 0$，得 $x_n < x_{n+1}$，即 x_n 单增。

又 $x_1 = 1, x_2 = \sqrt{2} < 2$，不妨设 $x_{n-1} < 2$，则 $x_n = \sqrt{1+x_{n-1}} < \sqrt{3} < 2$，即 x_n 有上界。

由单调有界准则，x_n 有极限 x，从而可在 $x_n = \sqrt{1+x_{n-1}}$ 两边取极限，得 $x = \sqrt{1+x}$，故极限为 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

注 (1) 最好用数学归纳法严格证明单调、有界性。

(2) 一定要先证明极限存在，然后才可以两边取极限。

例如，对数列 $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + 2x_n$，若直接贸然对其取极限，会得到其极限为 -1。这无疑是错误的，因为原极限显然不存在。

4. 第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\ (1^\infty\text{型})$$

注 此极限的一般形式为

$$\lim(1+\text{无穷小})^{\frac{1}{\text{该无穷小}}} = \mathrm{e}$$

例29 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{100}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x}{1-2x}\right)^{\frac{1}{x}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$。

解 (1) 原式$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)\right]^{100}=1$

注 只有 $\lim f(x),\lim g(x)$ 都存在时，才有 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim f(x)^{\lim g(x)}$

即对 1^{∞} 型极限 $\lim f(x)^{g(x)}$，因为极限 $\lim g(x)=\infty$ 不存在，所以

$$\lim f(x)^{g(x)}\neq\lim f(x)^{\lim g(x)}$$

若极限 $\lim[1+f(x)]^{g(x)}$ 为 1^{∞} 型，则

$$\lim[1+f(x)]^{g(x)}=$$

$$\lim\left\{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right\}^{f(x)g(x)}$$

$$=e^{\lim f(x)g(x)}$$

建议直接记住结论：

$$\lim[1+f(x)]^{g(x)}\left(1^{\infty}\right)$$

$$=e^{\lim f(x)g(x)}$$

这样，在计算 1^{∞} 型极限时，可以使得计算过程快捷、正确。

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right]^{x}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x}\right)\cdot x}=e^{-2}$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{4x}{1-2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{1-2x}\cdot\frac{1}{x}}=e^{4}$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[1+(\tan x-1)]^{\tan 2x}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)\frac{2\tan x}{1-\tan^{2}x}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{1+\tan x}}=e^{-1}$$

安徽理工大學
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§7 无穷小的比较

安徽理工大学

1. 无穷小阶的定义

设 α,β 为无穷小，则

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是 α 的高阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$。

(2) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是 α 的低阶无穷小。

安徽理工大学

(3) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\ (C\neq 0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小。

(4) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\ (C\neq 0)$，则称 β 是 α 的同阶无穷小，记为 $\beta=O(\alpha)$。

特别地，$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$ 时，称 β 是 α 的等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$。

安徽理工大学

2. 等价无穷小代换法则

定理14 若 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$。

证 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)$

$=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

安徽理工大学

本定理表明，在极限的计算过程中，若某无穷小与其余部分为乘或除的关系，则可用其等价无穷小代换。

注 和、差中的无穷小一般不可代换。

3. 常用的等价无穷小代换

(1) $\sin x\sim x$ (2) $\arcsin x\sim x$

(3) $\tan x\sim x$ (4) $\arctan x\sim x$

安徽理工大学

(5) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ (6) $e^x-1\sim x$

(7) $a^x-1\sim x\ln a$ (8) $\ln(1+x)\sim x$

(9) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\ \alpha\in R$

例如，

$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x,\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$

注 上述 x 应理解为某个无穷小。

安徽理工大学

例30 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1}{n}=1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\cdot\dfrac{x}{2^n}=x$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0\left(\dfrac{1}{x}\to0,\sin x\text{有界}\right)$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x\cdot x}=2$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{2}{x}=2$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(1/\cos x-1\right)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cdot\cos x}=\dfrac{1}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}=\dfrac{3}{2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

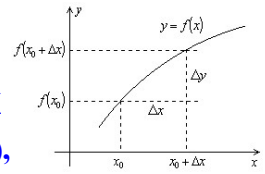
安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§8 函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

1. 增量

$y=f(x)$的自变量从x_0变到x，y相应地由 $f(x_0)$变到$f(x)$，



分别称 $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ $=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 在x_0处的自变量增量、函数增量。

2. 函数连续的定义

以下设 $y=f(x)$ 在x_0的某邻域内有定义。

定义1 若当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $y=f(x)$ 在 x_0处连续。

因为 $\Delta x=x-x_0$, $\Delta x\to 0\Leftrightarrow x\to x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, $\Delta y\to 0\Leftrightarrow f(x)$

$\to f(x_0)$，故有

定义2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在 x_0处连续。

例31 证明$f(x)=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续。

证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，则

$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$

$=\cos(x+\Delta x)-\cos(x)$

$$= -2\sin\frac{(x+\Delta x)+x}{2}\sin\frac{(x+\Delta x)-x}{2}$$

$$= -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$0 \leqslant |\Delta f(x)| = 2\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

由夹逼准则知，$\Delta x \to 0$时，$\Delta f(x) \to 0$，即$f(x)=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续。

3. 左、右连续

定义 若$f(x_0-0)=f(x_0)\big(f(x_0+0)=f(x_0)\big)$，则称$f(x)$在$x_0$处左(右)连续。

定理15 $f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow f(x)$在x_0处既左连续又右连续。

定义 若$f(x)$在开区间(a,b)内每一点都连续，则称$f(x)$在(a,b)内连续。若$f(x)$在(a,b)内连续，在$x=a$处右连续，在$x=b$处左连续，则称$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

二、函数的间断点

$f(x)$在x_0处连续的三要素

1. $f(x)$在$U(x_0)$有定义
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

据此可将间断点分为如下两类：

1. 第一类间断点——左右极限都存在

第一类间断点可分为如下两种：

1. 跳跃间断点：$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$；
2. 可去间断点：$f(x_0-0)=f(x_0+0)$，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

2. 第二类间断点——左右极限至少有一个不存在

第二类间断点比较复杂，可分为许多种，较为常见的有如下两种：

1. 无穷间断点：$f(x_0-0), f(x_0+0)$至少有一个为∞；
2. 振荡间断点：$f(x_0-0), f(x_0+0)$至少有一个不存在，也不为∞.

例32 下列点是否为间断点，为何种间断点？

$$(1)\ f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3, & x\leqslant 1, \\ x, & x>1, \end{cases} \quad x=1;$$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x=0$;

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, $x=0$;

(4) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $x=0$;

(5) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $x=0$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+2x-3)=0$

故 $x=1$为第一类跳跃间断点。

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$f(0)=0$，故 $x=0$为第一类可去间断点。

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}=\dfrac{3}{2}$，$f(0)$无定义

故 $x=0$为第一类可去间断点。

注 对(2)可通过重新定义 $f(0)=1$，对(3)可通过补充定义 $f(0)=3/2$，使$x=0$成为新函数的连续点，这就是可去的含义。

(4) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

故 $x=0$为第二类无穷间断点。

(5) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，也不为$\infty$，故 $x=0$为第二类振荡间断点。

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§9 连续函数及其性质

一、连续函数的运算及初等函数的连续性

定理16 若 $f(x),g(x)$ 在 x_0连续，则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}$$

在 x_0也连续。

定理17 若由连续函数复合而成的复合函数也连续。

定理18 基本初等函数在其定义域内均连续；初等函数在其定义区间内连续。

推论 若$f(x)$为初等函数，x_0为定义区间内一点，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\text{(代入)}$$

例33 求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \ln\arcsin x \overset{\text{代入}}{=} \ln\arcsin\dfrac{1}{2}$

$=\ln\dfrac{\pi}{6}$

(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{2\cos x}\overset{\text{代入}}{=}0$

例34 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ a+x^2, & x\leqslant 0 \end{cases}$

a为何值时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续。

解 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内连续。

又 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x^2)=a$

要 $f(x)$ 在 $x=0$处连续，即

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

故 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$处连续，从而在$(-\infty,+\infty)$ 内连续。

例35 讨论下列函数的连续性，如有断点，指明类型。

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq0, \\ 1, & x=0; \end{cases}$

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$。

解 (1) $x\neq0$时，$f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 为初等函数，故连续。

$x=0$时，$x\to0^-,\dfrac{1}{x}\to-\infty,2^{\frac{1}{x}}\to0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$

$x\to0^+,\dfrac{1}{x}\to+\infty,2^{\frac{1}{x}}\to+\infty,2^{-\frac{1}{x}}\to0$

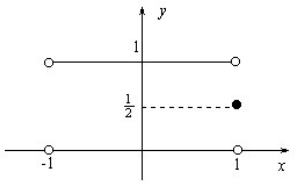
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}}=1$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处跳跃间断，在其它点处连续。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x|<1 \\ 1, & x=1 \\ \text{不存在}, & x=-1 \\ \infty, & |x|>1 \end{cases}$

故

$f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$



从而 $f(x)$ 在 $x\neq\pm1$ 时连续，在 $x=\pm1$ 处跳跃间断。

二、闭区间上连续函数的性质

定理19 (最值定理) 闭区间上的连续函数一定有最大值、最小值，即若 $f(x)\in C[a,b]$，则有 $\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使对任意 $x\in[a,b]$，均有

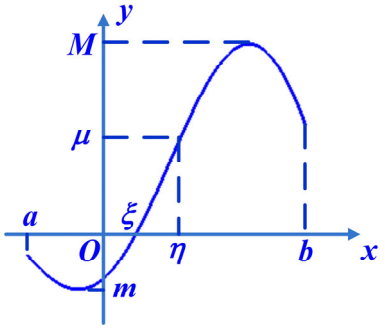
$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2)$$

定理20 (有界定理) 闭区间上的连续函数有界。

定理21 (零点定理) 若 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$。

定理22 (介值定理) 闭区间上的连续函数一定能取得介于最大、最小值之间的任何值，即若 $f(x)\in C[a,b]$，$m\leqslant\mu\leqslant M$，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大和最小值，则有 $\eta\in[a,b]$，

使 $f(\eta)=\mu$。



例36 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $a<c<d<b$，证明在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ 使 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$，其中 p,q 为任意正数。

证 因 $f(x)\in C[a,b]$，由最值定理，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，从而 $m\leqslant f(c), f(d)\leqslant M$

$$(p+q)m\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant(p+q)M$$

$$m \leqslant \frac{pf(c)+qf(d)}{p+q} \leqslant M$$

由介值定理，至少有一$\xi \in [a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$$

即 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$。

例37 证明方程 $xe^{2x}=1$ 至少有一个小于1的正根。

证 设 $f(x)=xe^{2x}-1$，则 $f(x)\in C[0,1]$。

又 $f(0)=-1<0, f(1)=e^2-1>0$，由零点定理，至少有一点$\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即方程 $xe^{2x}=1$至少有一个小于1的正根。

例38 设$f(x)\in C[0,1]$, 且$0\leqslant f(x)\leqslant 1, x\in[0,1]$，证明至少存在一点$\xi\in$ $[0,1]$，使 $f(\xi)=\xi$。

证 设$F(x)=f(x)-x$, 则$F(x)\in[0,1]$，$F(0)=f(0)\geqslant 0, F(1)=f(1)-1\leqslant 0$。

若$F(0)=0$ 或 $F(1)=0$，则可取$\xi=0$ 或 1，使 $f(\xi)=\xi$。

若$F(0)>0, F(1)<0$，由零点定理，至少有一 $\xi\in(0,1)$，使$F(\xi)=0$。

综上，有$\xi\in[0,1]$，使 $F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$。