安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

第2章 导数与微分

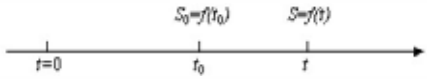
安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§1 导数概念

安徽理工大学

1. 引例

(1) 直线运动的瞬时速度



平均速度

$$\bar{v}_{t_0 t}=\frac{s-s_0}{t-t_0}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

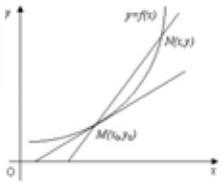
t_0 时刻瞬时速度

安徽理工大学

$$v_{t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

(2) 切线斜率

如图，割线MN的斜率为 $\frac{y-y_0}{x-x_0}$，由切线定义，切线斜率



$$k=\lim_{N\to M}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

安徽理工大学

上述两个引例的共同点是结果均可归结为下列形式的极限：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

即函数变化率的极限。

2. 导数定义

定义1 设$y=f(x)$在x_0的某邻域内有定义，如极限

安徽理工大学

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在x_0处可导，并称此极限为 $f(x)$在x_0处的导数，记为 $f'(x_0)$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$。

(1) 导数的其它定义形式有：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(2) 导数的几何意义

由引例2和定义1可知，导数 $f'(x_0)$ 即曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率。

例1 $f(x)$ 在 x_0 处可导，求

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

解 (1) 原式 =

$$-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[x_0+(-\Delta x)\right]-f(x_0)}{(-\Delta x)}$$

$$=-f'(x_0)$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{f\left[x_0+(-h)\right]-f(x_0)}{(-h)}$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$$

定义2 若 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点均可导，则对任一 $x\in(a,b)$，都有唯一导数值 $f'(x)$ 与之对应，构成 (a,b) 内的一个函数，称为 $y=f(x)$ 的导函数，简称导数，记为 $f'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}$.

切记 $f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}$

而不是 $f'(x_0)=\big(f(x_0)\big)'$。

3. 常用导数

(1) $f(x)=C$ $(C)'=0$ (1)

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$$

(2) $f(x)=x^{\mu}$ $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ (2)

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\mu}\left[\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1\right]}{\Delta x}$$

$$=x^{\mu}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu\cdot\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\mu x^{\mu-1}$$

其中，常用的有

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

(3) $f(x)=\sin x$ $(\sin x)'=\cos x$ (3)

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

同理，$(\cos x)' = -\sin x$ 。 (4)

(4) $f(x)=a^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ (9)

解 $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$= a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$$

特别地，$(e^x)' = e^x$。 (10)

(5) $f(x)=\log_a x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \quad (11)$$

解 $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x \ln a}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x \ln a} = \frac{1}{x\ln a}$$

特别地，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$。 (12)

4. 左右导数

定义3 若左右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

存在，则称之为 $y=f(x)$ 在 x_0处的左(右)导数，分别记为 $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$。

定义4 若 $f(x)$ 在开区间(a,b)内可导，且 $f'_+(a)$和 $f'_-(b)$都存在，则称 $f(x)$

在闭区间$[a, b]$上可导。

定理1 $f'(x)$存在 $\Leftrightarrow f'_-(x)=f'_+(x)$

例2 求 $f(x)=|x|$ 的导数。

解 本题为典型的分段函数求导问题，极易犯下列错误：

$x>0$时，$f(x)=x$, $f'(x)=1$；

$x<0$时，$f(x)=-x$, $f'(x)=-1$；

$x=0$时，$f(0)=0$, $f'(0)=0$。

解 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$x>0$时，$f(x)=x$, $f'(x)=1$；

$x<0$时，$f(x)=-x$, $f'(x)=-1$；

$x=0$时，

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

故$f'(0)$不存在，即$f(x)$在$x=0$处不可导，从而

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ \text{不存在}, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

注 开区间内函数的导数可直接用公式计算，但分段点处的导数通常要用导数定义(可能还要分左右导数)计算，切记！

5. 可导与连续的关系

定理2 若$f(x)$在x处可导，则$f(x)$在x处连续，即可导 $\Rightarrow$ 连续。

证 $f(x)$在x处可导，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，故$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x)\cdot 0=0$$

注 反之不成立，即连续不一定可导，见例2和例3。

例3 讨论 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在$x=0$处的连续性和可导性。

解 在$x=0$处，

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0$$

故$f(x)$在$x=0$处连续。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}$$

不存在，故$f(x)$在$x=0$处不可导。

若 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 或

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

结论如何？

例4 求曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 的与直线 $y=3x-1$ 平行的切线。

解 设切点为 (x_0,y_0)，则切线斜率为

$$f'(x_0)=\frac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}}$$

依题意，$f'(x_0)=\frac{3}{2}x_0^{\frac{1}{2}}=3,$

$x_0=4,\ y_0=8$

故切线方程为 $y-8=3(x-4)$，即

$y=3x-4$

§2 导数的运算法则

1. 导数的四则运算法则

设 $u(x),v(x)$ 均可导，则

(1) $[u\pm v]'=u'\pm v'$

$$y=\sqrt{x}-\frac{1}{x}+x^2-\cos x+\ln x+\sin 2$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2x$$

$$-(-\sin x)+\frac{1}{x}+0$$

(2) $[uv]'=u'v+uv'$

特别地，$[Cu]'=Cu'$，C为常数。

推广 $[uvw]'=u'vw+uv'w+uvw'$

$$y=e^x\sin x-2a^x$$

$$y'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'-(2a^x)'$$

$$=e^x\sin x+e^x\cos x-2a^x\ln a$$

(3) $\left[\dfrac{u}{v}\right]'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

例5 求(1) $y=\tan x$；(2) $y=\sec x$的导数。

解 (1) $y'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$= \sec^2 x$

即 $(\tan x)' = \sec^2 x$。 (5)

同理，$(\cot x)' = -\csc^2 x$。 (6)

(2) $y' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{1' \cos - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$

即 $(\sec x)' = \sec x \tan x$。 (7)

同理，$(\csc x)' = -\csc x \cot x$。 (8)

2. 反函数求导法则

定理3 若$y = f(x)$与$x = \varphi(y)$互为反函数，且$\varphi(y)$单调、可导，则

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ 即 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

例6 求y=arcsin$x$的导数。

解 y=arcsin$x$为x=sin$y$的反函数，

$y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

即 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$。 (13)

同理 $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (14)

例7 求y=arctan$x$的导数。

解 y=arctan$x$为x=tan$y$的反函数，

$y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$。

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

即 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$。 (15)

同理 $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ (16)

3. 复合函数求导法则

定理4 (链锁法则) 若 $y = f(u)$与$u = \varphi(x)$ 均可导，则 $y = f[\varphi(x)]$ 也可导，且 $y' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$，即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

注 注意复合函数导数的写法。

$$f'[\varphi(x)] \equiv \frac{df[\varphi(x)]}{d\varphi(x)} \neq \frac{df[\varphi(x)]}{dx}$$

$$\frac{df[\varphi(x)]}{dx} = \left(f[\varphi(x)]\right)'$$

推广 若 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 由

$$\left.\begin{aligned} y &= f(u) \\ u &= \varphi(v) \\ v &= \psi(x) \end{aligned}\right\}$$

复合而成，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

例8 求下列函数的导数：

(1) $y = \sin 2x$；

(2) $y = \tan x^2$；

(3) $y = \ln\cot x$；

(4) $y = e^{\sin\frac{1}{x}}$；

(5) $y = \ln^2\cos(e^{2x})$；

(6) $y = \sqrt{x^2 \pm a^2}$；

(7) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$；

(8) $y = \arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$；

(9) $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$；

(10) $y = f(x^2)$。

解 (1) $y = \sin 2x \begin{cases} y = \sin u \\ u = 2x \end{cases}$

$$\frac{dy}{du} = \cos u = \cos 2x, \frac{du}{dx} = 2$$

故 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 2\cos 2x$。

(2) $y' = \sec^2 x^2 \cdot 2x$。

(3) $y' = \frac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)$。

(4) $y' = e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$。

(5) $y' = 2\ln\cos(e^{2x})\cdot\frac{1}{\cos(e^{2x})}\cdot$

$$\left(-\sin(e^{2x})\right)\cdot e^{2x}\cdot 2$$

(6) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

注 建议熟记

$$\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(7) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

(8) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\left(-1+\dfrac{2}{1+x}\right)'$

$=\dfrac{1+x}{\sqrt{2x(1-x)}}\left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right)$

$=-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$

注 在导数的计算过程中要时刻注意化简。

(9) $y'=\dfrac{2f\cdot f'+2g\cdot g'}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$

$y'=\dfrac{f\cdot f'+g\cdot g'}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$

(10) $y'=\left[f(x^2)\right]'=f'(x^2)\cdot 2x$。

安徽理工大學
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§3 高阶导数

1. 引入

$y=\sin 2x$ 的导数 $y'=2\cos 2x$。

显然，y' 也有导数

$(y')'=(2\cos 2x)'=2(-\sin 2x\cdot 2)$

$=-4\sin 2x$

称为y的二阶导数，记为 y'' 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，

可理解为 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$。

同理有3阶, 4阶, …n 阶导数，记为 y''', $y^{(4)},\cdots,y^{(n)}$ 或

$$\frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}$$

2. 常用的n阶导数

(1) $y=a^x$

解 $y'=a^x\ln a$, $y''=a^x\ln^2 a,\cdots$,

故 $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$ 。

特别地，$(e^x)^{(n)}=e^x$。

(2) $y=\ln(a+x)$

解 $y'=\dfrac{1}{a+x}=(a+x)^{-1}$

$y''=(-1)(a+x)^{-2}$

$y'''=(-1)(-2)(a+x)^{-3}$

$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n+1)(a+x)^{-n}$

$=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(a+x)^n}$

故 $\left(\ln(x+a)\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(a+x)^n}$。

类似地，

$\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(a+x)^{n+1}}$

(3) $y=\sin x$

解 $y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y^{(4)}=\sin x=\sin\left(x+4\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

故 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$。

同理 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$。

例9 求(1) $y=\sin^2 x$ ；

(2) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 的n阶导数。

解 (1) $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$y^{(n)}=(\sin 2x)^{(n-1)}$

$=2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

(2) $y=\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$

$y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}$

$=\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}$

$=(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$

例10 (1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ；

(2) $y=\ln[f(x)]$，求 y''。

解 (1) $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$y''=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(2) $y'=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

$$y''=\frac{f(x)\cdot f''(x)-f'(x)\cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

$$=\frac{f(x)\cdot f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$$

例11 对函数 $y=y(x)$，试从反函数求导法则导出：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=-\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$。

解 (1) 由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-\dfrac{y''}{(y')^3}\right)$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

$$=-\frac{(y')^3\cdot y'''-y''\cdot 3(y')^2y''}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}$$

$$=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$$

注 本题计算过程中涉及反函数求导法则、复合函数求导法则和导数的四则运算法则，有较大难度。

3. 莱布尼兹公式

$$[uv]^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''$$

$$+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}$$

例12 $y=x^2\cos 2x$，求 $y^{(20)}$。

解 $u^{(20)}=2^{20}\cos\left(2x+20\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$u^{(19)}=2^{19}\cos\left(2x+19\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$u^{(18)}=2^{18}\cos\left(2x+18\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$v=x^2,v'=2x,v''=2,v'''=0$$

$$y^{(20)}=2^{20}\cos 2x\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\sin 2x\cdot 2x$$

$$+\frac{20\times 19}{2}\cdot 2^{18}(-\cos 2x)\cdot 2$$

$$=2^{20}\left(x^2\cos 2x+20x\sin 2x-95\cos 2x\right)$$

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§4 隐函数求导法、对数求导法与参变量函数求导法

1. 隐函数求导法

(1) 隐函数

对于二元方程 $F(x,y)=0$, 若给定 x，由方程可确定唯一的y与之对应，则称y为x的隐函数。

例如，$y^3-x=0$, $\arctan(y/x)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 均确定了y为x的隐函数，其中前者可显化，而后者不能。

(2) 求导法

在方程 $F(x,y)=0$ 两边关于 x 求导。此时，切记 y 为 x 的函数。

例13 (1) $x^3+y^3-3xy=0$ ；

(2) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 求 y'。

解 (1) $3x^2+3y^2\cdot y'-3(y+xy')=0$

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

(2) $\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$$\frac{\dfrac{xy'-y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$$

$$\frac{xy'-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

例14 $y=1+xe^y$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解 $y'=e^y+xe^y\cdot y'$

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{2-y}\quad(\text{化简})$$

$$y''=\frac{(2-y)e^y\cdot y'-e^y(-y')}{(2-y)^2}$$

$$=\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$$

2. 对数求导法

例15 $y=x^x$，求y'。

错解 $y'=x\cdot x^{x-1}$。

注 $y=x^x$ 既不是幂函数，也不是指数函数，而是幂指函数，需要用对数求导法。

解 两边取对数，得 $\ln y = x\ln x$，

然后再两边对x求导，有

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x}$$

故 $y' = y(1+\ln x)$。

或 $y = \mathrm{e}^{x\ln x}$，

$$y' = \mathrm{e}^{x\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x(1+\ln x)$$

注 上述两种方法本质相同，但第一种方法书写更方便。

例16 $y = \dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$，求$y'$。

解 $\ln y = \dfrac{1}{2}\ln(x+2) + 4\ln(3-x) - 5\ln(x-1)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} + 4\cdot\frac{-1}{3-x} - 5\cdot\frac{1}{x+1}$$

故 $y' = y\left[\dfrac{1}{2(x+2)} + \dfrac{4}{x-3} - \dfrac{5}{x+1}\right]$。

注 对数求导法适用于

(1) 幂指函数 $y = [u(x)]^{v(x)}$

(2) 由多个式子的积, 商, 幂, 方根组成的函数

3. 参变量函数求导法

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定了y为x的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \cdots$。

解 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$$

注 此时 y'为t 的显函数。

$$y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y''/dt}{\mathrm{d}x/dt}$$

例17 (1) $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(2) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$，求$y'(0)$。

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{-2\sin 2t}{1+\cos t}$。

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{1-1/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} = \dfrac{t}{2}$

又 $x=0$ 时, $t=0$，故

$$y'(0) = \frac{t}{2}\Big|_{t=0} = 0$$

例18 (1) $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$，

求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

安徽理工大学

解 (1) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$

$=\dfrac{3-3t^2}{2-2t}=\dfrac{3}{2}(1+t)$

$y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'/dt}{dx/dt}=\dfrac{3/2}{2-2t}=\dfrac{3}{4(1-t)}$

(2) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}$

$=-\dfrac{b}{a}\cot t$

安徽理工大学

$y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'/dt}{dx/dt}=\dfrac{-\frac{b}{a}(-\csc^2 t)}{-a\sin t}$

$=-\dfrac{b}{a^2}\csc^3 t$

例19 $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$，求$\dfrac{d^3y}{dx^3}$。

解 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}$

安徽理工大学

$=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{t}+\dfrac{3}{2}t$ (化简)

$y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'/dt}{dx/dt}=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{3}{2}}{-2t}$

$=-\dfrac{1}{4}\cdot t^{-3}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{t}$ (化简)

$y'''=\dfrac{dy''}{dx}=\dfrac{dy''/dt}{dx/dt}$

安徽理工大学

$=\dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)(-3)t^{-4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2}}{-2t}=-\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1+t^2}{t^5}$

例20 求曲线$\begin{cases}x=t^3-4\\ y=2t^2+1\end{cases}$在$t=2$处的切线方程。

解 $t=2$时，$x=4$，$y=9$。

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{4t}{3t^2}=\dfrac{4}{3t}$

安徽理工大学

$k=y'(4)=\left.\dfrac{4}{3t}\right|_{t=2}=\dfrac{2}{3}$

故切线方程为 $y-9=\dfrac{2}{3}(x-4)$，即

$2x-3y+19=0$

安徽理工大學
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§5 函数的微分

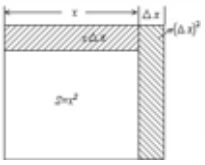
安徽理工大学

一、微分的概念

1. 引例

$S=x^2, \Delta S=(x+\Delta x)^2$

$-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$



$\begin{cases}(1)\ \Delta x\text{的线性函数}\ 2x\cdot\Delta x\text{—线性主部}\\(2)\ (\Delta x)^2,\Delta x\text{的高阶无穷小,即}o(\Delta x)\end{cases}$

安徽理工大学

2. 定义

对 $y=f(x)$，若 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 可表示成其线性主部与 Δx 的高阶无穷小之和，即

$$\Delta y=A(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

则称 $y=f(x)$在 x 处可微，$A(x)\Delta x$ 称为 $y=f(x)$在 x 处的微分，记为

$$dy=A(x)\Delta x$$

安徽理工大学

即 $\Delta y=dy+o(\Delta x)$。

显然，$|\Delta x|<<1$ 时，$\Delta y\approx dy$。

3. 可微的条件

定理 $y=f(x)$可微 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)=A(x)$。

证 必要性：$y=f(x)$在 x 处可微，即 $\Delta y=A(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$。

从而，

安徽理工大学

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A(x)$$

即 $y=f(x)$在 x 处可导，且 $f'(x)=A(x)$.

充分性：$y=f(x)$在 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

安徽理工大学

存在。

由定理知，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,\ \alpha$为$\Delta x\to 0$时的无穷小，从而有

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$$

而 $f(x)\Delta x$为 Δx 的线性函数，$\alpha\Delta x$ 显然为 Δx 的高阶无穷小，故 $y=f(x)$在 x 处可微。

安徽理工大学

4. 微商

通常称 Δx 为自变量的微分，记为 dx，即$dx=\Delta x$，从而由 $dy=A(x)\Delta x$ 可得$dy=f'(x)dx$，即

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}$$

此式表明，导数符号 $\frac{dy}{dx}$的确可以视为函数微分dy与自变量微分dx的商，

故导数也可称为微商。

例21 (1) $y=\ln(1+x)$，求dy；

(2) $y=\sin x$，求 $\mathrm{d}y\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$；

(3) $y=2x^2+1$，当$x=1$，$\Delta x=0.1$ 时，求 $\mathrm{d}y$与Δy。

解 (1) $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$。

(2) $\mathrm{d}y=\cos x\mathrm{d}x$，

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}x$$

(3) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

$=f(1+0.1)-f(1)=0.42$

$\mathrm{d}y=4x\cdot\Delta x,\mathrm{d}y\big|_{x=1,\Delta x=0.1}=0.4$

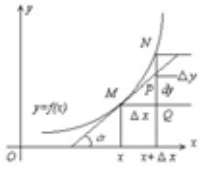
$$\left|\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta y}\right|=4.8\%$$

二、微分的几何意义

如图，$\Delta y=NQ$，而

$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x=$

$\tan\alpha\cdot MQ=PQ$



显然，当$|\Delta x|$很小时，

$\Delta y\approx\mathrm{d}y$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to\mathrm{d}y$。

三、微分公式及运算法则

因为$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，故微分基本公式、运算法则与导数公式、运算法则类似，见P80。

例22 在括号内填入适当的函数:

(1) $\mathrm{d}\big(\ln(1+x)\big)=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$；

(2) $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$；

(3) $\mathrm{d}(xy)=x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$；

(4) $\mathrm{d}\left(-\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{y^2}$。