安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

# 第3章 微分中值定理与导数应用

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

# §1 微分中值定理

安徽理工大学

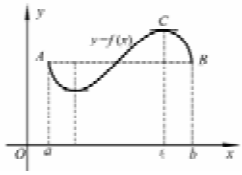
**1. Rolle中值定理**

若 $f(x)$ 满足：

(1) 在$[a, b]$上连续;

(2) 在$(a, b)$内可导；

(3) $f(a)=f(b)$，




则在$(a, b)$内至少存在一点 $\xi$，使得

$$f'(\xi)=0。$$



安徽理工大学

证 因 $f(x)\in C[a,b]$，故 $f(x)$在$[a, b]$上有最大值$M$和最小值$m$。

若$M=m$，则 $f(x)\equiv C$。对任意 $\xi\in(a,b)$，均有 $f'(\xi)=0$，结论成立。

若$M>m$，因 $f(a)=f(b)$，故 $f(a)$和 $f(b)$不能同时等于$M$ 和 $m$。不妨设 $f(a)\neq M$，即 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内部一点 $\xi$ 处取最大值。



安徽理工大学

当 $\Delta x>0$ 时，

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leq 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leq 0$$

即 $f'_+(\xi)\leq 0$。

当 $\Delta x<0$ 时，

$$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geq 0$$



安徽理工大学

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geq 0$$

即 $f'_-(\xi)\geq 0$。

又 $f(x)$ 在$(a, b)$内可导，故

$$f'_+(\xi)=f'_-(\xi)$$

从而 $f'(\xi)=0$。

例1 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为满足

$$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

的实数，证明方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$在(0,1)内至少有一个实根。

证 设 $f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

则 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 $f(0)=0$,

$$f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$



由Rolle定理，至少有一个 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n=0$, 即 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$在(0,1)内至少有一个实根。

例2 设 $f(x)$在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，求证：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)+f'(\xi)=0。$$



(2) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\eta f(\eta)+f'(\eta)=0。$$

注 虽然本题易联想到Rolle定理，但目标函数的构造有一定难度，是解题的关键。提请揣摩本题构造目标函数的思路与方法。

证 令 $F(x)=e^xf(x)$，则 $F(x)$在[a, b]上连续，在(a, b)内可导，且 $F(a)$



$=F(b)=0$，故存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$。

又 $e^{\xi}\neq0$, 故有 $f(\xi)+f'(\xi)=0$。

(2) 令 $F(x)=e^{x^2/2}f(x)$，则 $F(x)$在[a, b]上连续，在(a, b)内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，故存在 $\eta\in(a,b)$，使 $F'(\eta)=0$，即

$$\eta e^{\eta^2/2}f(\eta)+e^{\eta^2/2}f'(\eta)=0。$$



由于 $e^{\eta^2/2}\neq0$，故有

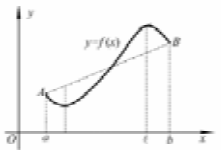
$$\eta f(\eta)+f'(\eta)=0。$$

2. Lagrange中值定理

若 $f(x)$满足：

(1) 在[a, b]上连续;

(2) 在(a, b)内可导,



则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)。$$



证 令 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

则 $F(x)$在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，且 $F(a)=F(b)=0$。

由Rolle定理, 至少有一个 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

注 (1) 因 $\xi \in (a,b)$，故 $\xi$ 可记为

$$\xi = a + \theta(b-a)$$

其中 $0 < \theta < 1$。

(2) Lagrange定理的一般形式为

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x$$

或

$$\Delta y = f'(\xi)\Delta x$$

称为有限增量公式或微分中值定理。



例3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，证明在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

证 令 $F(x) = xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导。

由Lagrange定理，有 $\xi \in (a,b)$ 使



$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi)$$

即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

例4 设 $a > b > 1, n > 1$，证明

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$$

证 令 $f(x) = x^n$，则 $f(x)$ 在 $[b, a]$



上连续，在 $(b, a)$ 内可导，故有 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(\xi) = n\xi^{n-1}$$

又 $b < \xi < a$，$b^{n-1} < \xi^{n-1} < a^{n-1}$，故

$$nb^{n-1} < \frac{f(a)-f(b)}{a-b} < na^{n-1}$$

即 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$



定理 在区间 $I$ 上，

$$f'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv C$$

证 充分性显然，下证必要性。

因 $f'(x) \equiv 0$，$f(x)$ 满足Lagrange定理条件，故对任意 $x_1, x_2 \in I$，有

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi) = 0$$

得 $f(x_1) = f(x_2)$，从而 $f(x) \equiv C$。



例5 证明：$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$，$x \in [-1,1]$。

证 令 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$，则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0$$

得 $f(x) \equiv C$。

又 $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\frac{\pi}{2}$，

得 $C=\frac{\pi}{2}$，故 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$。

同理可证，$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$

例6 若 $f(x)$满足

$$f'(x)=f(x),\ f(0)=1$$

证明：$f(x)=e^x$。



证 令 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则

$$F'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0$$

从而，$F(x)\equiv C$。

由 $f(0)=1$，即 $F(0)=1$，得 $C=1$，故 $F(x)=1$，即 $f(x)=e^x$。

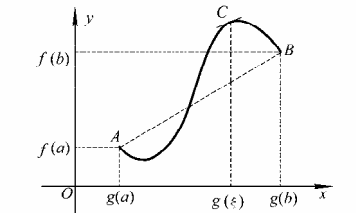
3. Cauchy中值定理

若 $f(x), F(x)$满足：(1) 在$[a,b]$上连续; (2) 在$(a,b)$内可导; (3) $F'(x)\neq 0$,



则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$






证 令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)]$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$。

由Rolle定理, 至少有一个$\xi\in(a,b)$使得 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$



例7 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导 $(a>0)$，证明在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$$

证 令$F(x)=x^2$, 则 $f(x), F(x)$在$[a,b]$上连续, 在$(a,b)$内可导, 且$F'(x)=2x\neq 0$。

根据Cauchy定理，有 $\xi\in(a,b)$,



使

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

即$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$。

例8 设 $f(x)$在$[a,b]$ $(a>0)$上连续, 在$(a,b)$内可导，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=(a+b)f'(\eta)/2\eta$$

证 由Lagrange中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$=(a+b)\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$$

再由Cauchy中值定理，存在 $\eta \in (a,b)$，使



$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

故

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$$



## §2 洛必达法则

1. $\frac{0}{0}$ 型

定理1 若(1) $\lim f(x)=\lim F(x)=0$; (2) $f(x), F(x)$可导且$F'(x)\neq 0$; (3) $\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在或为$\infty$，则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

证 下设极限过程为 $x\to a,\ x\to\infty$



时同理可证。

因 $\lim f(x)=\lim F(x)=0$ ，故$x=a$为 $f(x),F(x)$ 的连续点或可去间断点，从而可得 $f(a)=F(a)=0$。

设$x$为$a$邻域内一点，且$x>a$，则 $f(x),F(x)$在$[a, x]$上连续，在$(a, b)$内可导，且 $F'(x)\neq 0$。

由Cauchy定理，



$$\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\ \xi\in(a,x)$$

即

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

又 $x\to a$ 时，$\xi\to a$ ，且 $\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在，故

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

注 (1) 在实际运用时，只要极限为 $0/0$ 型，即可试用法则；

(2) 求极限时，最好将洛必达法则与等价无穷小代换结合使用并随时化简。

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$。$\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$



$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

例10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$。$\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

解 在求某些 $\dfrac{0}{0}$ 型极限时，要考虑先用等价无穷小代换将其充分化简，然后再用洛必达法则。



解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{\operatorname{arccot} x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1/x^2}{-1/(1+x^2)}=1$$

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$

解 原式 $=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{xe^x+xe^{-x}}{2}\sin\dfrac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{x^3}$$



$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{xe^x+xe^{-x}}{2}\cdot\dfrac{xe^x-xe^{-x}}{2}}{x^3}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}e^{-2x}\frac{e^{4x}-1}{x}=-2$$



2. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

定理2 若(1) $\lim f(x)=\infty,\lim F(x)=\infty$；(2) $f(x),F(x)$ 可导且 $F'(x)\neq 0$；(3) $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为 $\infty$，则

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)}$$



例12 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$。$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}$

$=0$

注 由本题可知，下列无穷大的排序为

$$\ln x\ll x^n\ll a^x$$

例13 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$ 存在，但不可用洛必达法则计算。

证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

试用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ 不存在，也不



为∞，即故不可用洛必达法则计算。

但原极限存在。事实上，

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}\sin x}{1+\frac{1}{x}\sin x}=1$$

3. 其它未定型

极限中共有七种未定型：

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty};0\cdot\infty,\infty-\infty;0^0,1^\infty,\infty^0$$



(1) $0\cdot\infty\Rightarrow\begin{cases}0/0\text{或}\infty/\infty\\ \text{直接计算}\end{cases}$

例14 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$。$(0\cdot\infty)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0$

注 本题给出了一个基本结论，某



些问题最终均可归结为此问题。

例15 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$。$(0\cdot\infty)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$



(2) $\infty-\infty\Rightarrow\begin{cases}0/0\\ \infty/\infty\end{cases}$

例16 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$。$(\infty-\infty)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$



例17 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$。

解 本题为∞－∞型，但两项很难合并。此时可考虑做代换，将极限变量变为无穷小。

原式 $\overset{1/x=t}{=\!=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-1/(1+t)}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1/(1+t)^2}{2}=\dfrac{1}{2}$

注 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}$ 是极为基本的极限，许多较复杂的极限经变换后都可化为此极限。

(3) $0^0, 1^\infty, \infty^0$

上述三种为未定型中的高级型，计算思路为利用对数恒等式将其化为 $0\cdot\infty$ 型，然后再做进一步计算。



根据对数恒等式

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

易证，$g(x)\ln f(x)$总为 $0\cdot\infty$ 型。

例18 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$。$(0^0)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\sin x\ln x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x\ (0\cdot\infty)}$ (注意代换化简)



$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$

例19 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$。$(1^\infty)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)(0\cdot\infty)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)}$



$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$

$= e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$

例20 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$。$(\infty^0)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\cot x}{\ln x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$



$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot(-\csc^2 x)}{\frac{1}{x}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin^2 x}}$

$= e^{-1}$



安徽理工大學 ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

## §3 Taylor公式

安徽理工大学

1. 问题的提出

如何用多项式近似表示复杂函数，并做误差估计？

$$e^x \approx 1+x,\ \ln(1+x) \approx x,\ \sin x \approx x,$$

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2},\cdots$$

缺陷：$\begin{cases}(1)\text{ 精度不高；}\\(2)\text{ 不能估计误差。}\end{cases}$



安徽理工大学

问题 求一个关于$(x-x_0)$的$n$阶多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

使得在 $M_0(x_0, f(x_0))$ 附近，$f(x)\approx P_n(x)$，并给出用 $P_n(x)$代替 $f(x)$ 的误差估计式。



安徽理工大学

2. 问题的分析

从几何上看， $P_n(x)$应满足：

(1) $f(x_0)=P_n(x_0)$

即两曲线均过$M_0$点。

(2) $f'(x_0)=P_n'(x_0)$

即两曲线在$M_0$点处有相同的切线。

(3) $f''(x_0)=P_n''(x_0)$

即两曲线在$M_0$点处有相同的弯曲方向



安徽理工大学

和弯曲程度。

一般地，应有

$$f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0),\ k=1,2,\cdots,n$$

3. Taylor中值定理

定理 若 $f(x)$ 在$x_0$的某邻域内有$n$+1阶导数，则该邻域内有Taylor公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+$$



安徽理工大学

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$R_n(x)$称为余项，有下列两种形式：

(1) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

$\xi$介于$x$与$x_0$之间，称为Lagrange型余项。



安徽理工大学

(2) $R_n(x)=o\left[(x-x_0)^n\right]$，称为Peana型余项。

特别地，$n=0$时，

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

即为Lagrange公式。

注 关于Taylor公式两种形式，余项的阶及Taylor公式的应用详见辅导书P66-67。

## 4. 麦克劳林公式

若 $x_0=0$, 则 $f(x)=f(0)+f'(0)x$

$$+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

称为$n$阶麦克劳林公式。

例21 求下列 $f(x)$的麦克劳林公式:

(1) $f(x)=e^x$ ;

(2) $f(x)=\sin x$ ;



(3) $f(x)=\ln(1+x)$ ;

(4) $f(x)=(1+x)^\alpha, \alpha\in R$。

解 (1) $f^{(k)}(x)=e^x, f^{(k)}(0)=1$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{1}{k!}$$

$$\text{故 } e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$



(2) $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$$f^{(k)}(0)=\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases}$$

$$\text{故 } \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$+\frac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$



同理,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{m-1}$$

$$\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}+\frac{\cos(\theta x+m\pi)}{(2m)!}x^{2m}$$

(3) $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$



$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\text{故 } \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+R_n(x)=$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$



(4) $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$

$$(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$\text{故 } (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

注 (1) 建议熟记

$e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$

这五个常用Tayor公式；

(2) Tayor公式可用于：求极限；求高阶导数；证明某些重要结论；

(3) 凡是在需要研究函数与其各阶导数关系的问题中都可以考虑应用Tayor公式。



例22 用Taylor公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$。



解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}=0$

或 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$



$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{x}{6}+\frac{o(x^4)}{x^2}\right]=0$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left\{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\right.\right.$



$\left.\left.o(x^4)\right]-\left[1+\left(-\frac{x^2}{2!}\right)+\frac{(-x^2/2!)^2}{2!}+o(x^4)\right]\right\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{-1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right)=-\frac{1}{12}$



(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\cdot e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-x\right]}=e^{-\frac{1}{2}}$

例23 设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且 $f'(a)=0, f'(b)=0$，求证：存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$

证 将 $f(x)$在$x=a,b$ 处展为Taylor展式，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(\xi_1)$$



$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{(x-b)^2}{2!}f''(\xi_2)$$

令 $x=\frac{a+b}{2}$，得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_1)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2)$$



两式相减，有

$$f''(\xi_1)-f''(\xi_2)=\frac{8}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)]$$

令 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则

$$2|f''(\xi)| \geq |f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|$$

$$=\frac{8}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$



故

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$$



安徽理工大學
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

## §4 函数单调性 极值与最值

一、函数的单调性

1. 函数单调性的判定

定理1 若在区间 $I$ 内 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $I$ 内单调增加或减少。

证 任取 $x_1,x_2 \in I, x_1<x_2$，由拉格朗日中值定理

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2)$$

若 $f'(x)>0$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $f(x)$ 在区间 $I$ 内单调增加。

若 $f'(x)<0$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，故 $f(x)$ 在区间 $I$ 内单调减少。

例24 判定下列函数单调性：

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$；

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$。



解 (1) $y'=6x^2-12x-18$

$=6(x-3)(x+1)$

当 $x>3$ 或 $x<-1$ 时，$y'>0$；当 $-1<x<3$ 时，$y'<0$，故 $y$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$ 内单增，在 $(-1,3)$ 内单减。

(2) $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$，当 $x>0$ 时，$y'>0$；当 $x<0$ 时，$y'<0$，故 $y$ 在 $(-\infty,0)$ 内单



减，在 $(0,+\infty)$ 内单增。

2. 用单调性证明不等式

例25 证明不等式：

(1) $x>\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}\ (x>0)$；

(2) $\ln^2(1+x)<\frac{x^2}{1+x}\ (x>0)$。

证 (1) 令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，则

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$$



即 $f(x)$ 单增。

又 $f(0)=0$，故 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $x>\ln(1+x)$。

类似可证，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$。

(2) 在用单调性证明不等式时，有时需要对不等式进行适当变形，以便于导数计算及其符号判定。



令 $f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则

$$f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

显然，导数的符号不易判定。此时，可考虑二阶导数。

$$f''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2$$

$$=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}$$



当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，即 $f'(x)$ 单减。又 $f'(0)=0$，得 $f'(x)<f'(0)=0$，即 $f(x)$ 单减。

从而，当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，所以 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$，即

$$\ln^2(1+x)<\frac{x^2}{1+x}$$

### 3. 用单调性证明根的唯一性

定理2 单调函数在其单调区间内最多只有一个零点。

方程根的存在唯一性是微积分中较为常见的问题。讨论此类问题的一般思路是，首先证明方程至少存在一个根，再说明方程至多有一个根。

证明方程至少有一个根的方法：



(1) 零点定理；

(2) Lagrange中值定理；

(3) 函数性态。

证明方程至多有一个根的方法：

(1) 函数的单调性；

(2) Rolle定理反证。

例26 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上满足

$$f'(x)>k>0,\ f(a)<0$$



证明方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 仅有一根。

证 本题属典型的方程根的存在唯一性问题。

因为题中实际上已给出单增的条件，且函数在左端点处的值 $f(a)$ 小于零，所以只需再证明函数在右端点处的值 $f(b)$ 大于零即可。



考虑到需要将 $f(a),f(b)$ 及 $f'(x)$ 相联系，自然联想到拉格朗日中值定理。

对 $f(x)$ 在 $[a,a-f(a)/k]$ 上应用拉格朗日中值定理

$$\begin{aligned}&f[a-f(a)/k]-f(a)\\&=[(a-f(a)/k)-a]f'(\xi)\\&>-f(a)/k\cdot k=-f(a)\end{aligned}$$



得 $f[a-f(a)/k]>0$。

又 $f(a)<0$，由零点定理，$f(x)$ 至多一个零点。

从而，$f(x)=0$ 在区间 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内仅有一根。



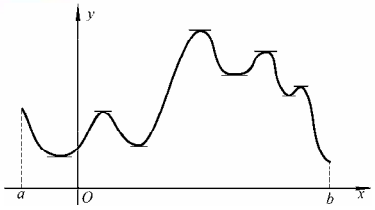
## 二、函数的极值

### 1. 极值的定义

定义 若存在 $x_0$ 的一个邻域，对此邻域内除 $x_0$ 外的任何 $x$，均有

$$f(x)<f(x_0)\ \text{或}\ f(x)>f(x_0)$$

则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的一个极大或极小点，$f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 的一个极大值或极小值。




注 极值是局部性概念，仅在$x_0$附近考虑；最值是全局性概念，要在整个区间上考虑。



2. 函数取得极值的必要条件

定理3 若$f(x)$在$x_0$处可导，且在$x_0$处取极值，则$f'(x_0)=0$。

证 不妨设$x_0$为极大点，即在$x_0$的某邻域内有

$$f(x)<f(x_0)(x\neq x_0)$$

当$x<x_0$时，

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$



$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

同理，$f'_+(x_0)\leq 0$。

又$f(x)$在$x_0$处可导，即$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$，故$f'(x_0)=0$。

注 (1) 导数为零的点称为驻点，故定理1可叙述为“对可导函数，极值点一定是驻点”；



(2) 若可导函数无驻点，则函数无极值；

(3) 驻点不一定为极值点；

例如，$y=x^3, y'=3x^2$，有驻点$x=0$，但$x=0$不是极值点。

(4) 不要误认为只有驻点才可能成为极值点，导数不存在的点也有可能成为极值点，即可能的极值点为



$$\begin{cases}(1)\text{驻点}\\(2)\text{导数不存在的点}\end{cases}(\text{可疑点})$$

例如，$y=|x|$在$x=0$处不可导，但在$x=0$处有极小值0。

3. 函数取得极值的充分条件

定理4 (判别法一) 设$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在。

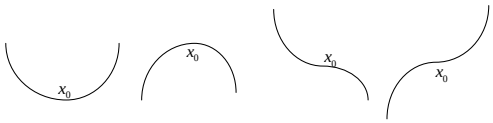
(1) 若$x<x_0$时，$f'(x)>0$；$x>x_0$



时，$f'(x)<0$，则$x_0$为极大点。

(2) 若$x<x_0$时，$f'(x)<0$；$x>x_0$时，$f'(x)>0$，则$x_0$为极小点。

(3) 若在$x_0$两侧，$f'(x)$不变号，则$x_0$不是极值点。



定理5 (判别法二) 设 $f'(x_0)=0$。

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $x_0$ 为极大点;

(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $x_0$ 为极小点;

(3) 若 $f''(x_0)\neq 0$，则需要进一步判定。

4. 求极值步骤

(1) 求 $f'(x)$ ；

(2) 求出 $f(x)$的驻点及 $f'(x)$不存



在的点即可疑点。

(3) 用判别法一或二判定上述点是否为极值点，然后求出极值。

例27 求下列函数极值：

(1) $y=2x^3-3x^2$；

(2) $y=1-(x-2)^{2/3}$；

(3) $y=x^{1/x}\ (x>0)$。



解 (1) $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$，

得驻点 $x=0,1$。

$x>0$ 时, $y'<0$; $x<0$ 时, $y'>0$,

故$x=0$为极大点，极大值为0。

$x>1$ 时, $y'>0$；$x<1$ 时, $y'<0$,

故$x=1$为极小点，极大值为$-1$。

或 $y''=12x-6$, $y''(0)=-6<0$,

$y''(1)=6>0$，故$x=0$为极大点，$x=1$



为极小点。

(2) $y'=-\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

$f'(x)$在$x=2$处不存在。

$x>2$时，$y'<0$；$x<2$时，$y'>0$，

故$x=2$为极大点，极大值为 $y(2)=1$。

(3) $y=e^{\frac{1}{x}\ln x}$, $y'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$



得驻点 $x=e$。

$x>e$ 时, $y'<0$; $x<e$ 时, $y'>0$,

故$x=e$为极大点, 极大值为 $y(e)=e^{\frac{1}{e}}$。

注 根据上述结果可得，数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大项为 $\sqrt[3]{3}$。

三、函数的最大、最小值

设 $f(x)\in C[a,b]$，求 $f(x)$在$[a,b]$



上的最大、最小值。

解 首先求出 $f(x)$在$(a,b)$内的所有可疑点(驻点、不可导点) $x_1,x_2,\cdots,x_n$，然后比较 $f(a), f(x_1),\cdots, f(x_n), f(b)$，最大(小)者即为最大(小)值。

例28 求 (1) $f(x)=x^4-8x^2+2$, $x\in[-1,3]$; (2) $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$, $x\in[-1,1/2]$的最大、最小值。

解 (1) $f'(x)=4x^3-16x$

$=4x(x-2)(x+2)$

得驻点 $x=0,2,-2$。

$f(-1)=-5,\ f(0)=2,$

$f(2)=-14,\ f(3)=11$

故最大值为 $f(3)=11$，最小值为 $f(2)=-14$。

(2) $f'(x)=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$



可疑点 $x=\dfrac{2}{5},0$。

$f(-1)=-2,\ f(0)=0,$

$f\left(\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}},\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$

故最大值为 $f(0)=0$，最小值为 $f(-1)=-2$。

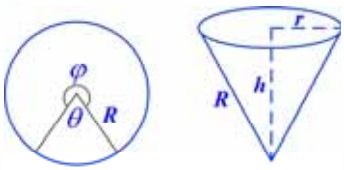


在实际中，若 $f(x)$仅有唯一驻点 $x_0$，且由经验知 $f(x)$的最大(小)值一定存在，则 $f(x_0)$即为最大(小)值，无须判断。

例29 从一块半径为R的圆形铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗，问留下的扇形的中心角 $\varphi$ 为多大时，做成的漏斗容积最大？



解




$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi(R^2-h^2)h$

$\dfrac{dV}{dh}=\dfrac{1}{3}\pi(R^2-3h^2)$



唯一驻点 $h=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$，对应的 $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}R$，

此时，

$2\pi r=2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}R=R\varphi,\ \varphi=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

剪下的角度为 $\theta=2\pi-\varphi\approx 66^\circ$。



安徽理工大学 ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

## §5 曲线的凹凸性与拐点

## 1. 曲线的凹凸性

定义 设 $f(x)\in C(a,b)$，若对任意 $x_1, x_2\in(a,b)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

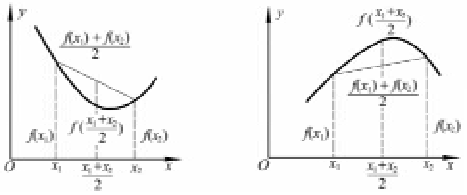
或

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$





则称 $f(x)$在$(a,b)$内的图形为凹的或凸的。







定理1 若 $f(x)$在$(a,b)$内二阶可导，则 $f''(x)>0\left(f''(x)<0\right)$ 时，$f(x)$为凹(凸)的。

例30 判定下列曲线的凹凸性：

(1) $y=x+\frac{1}{x}$；(2) $y=xe^{-x}$。

解 (1) $y'=1-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$





故曲线在$(-\infty,0)$内为凸的，在 $(0,+\infty)$内为凹的。

(2) $y'=e^{-x}-xe^{-x}$，

$y''=-e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}(x-2)$

$x>2$时, $y''>0$; $x<2$时, $y''<0$，

故曲线在$(2,+\infty)$内为凹的，在 $(-\infty,2)$内为凸的。





例31 证明：

$$\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,$$

其中，$x,y>0$，$x\neq y$，$n>1$。

证 设 $f(t)=t^n, t>0$，则

$$f''(t)=n(n-1)t^{n-2}>0$$

$f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为凹的，故对任意$x$, $y>0$，有





$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

即

$$\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

## 2. 拐点——曲线凹与凸的分界点

定理2 设 $f(x)$ 二阶导数连续，且 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点，则 $f''(x_0)=0$，即

拐点的必要条件是二阶导数等于零。

反之不成立。例如， $f(x)=x^4$，$f''(x)=12x^2$, $f''(0)=0$, 但$(0,0)$不是拐点。

可能的拐点：$\begin{cases}(1)\ f''(x)\text{的零点}\\(2)\ f''(x)\text{不存在的点}\end{cases}$

称为可疑点。

定理3 (判别法一) 设$(x_0, f(x_0))$为



可疑点。若 $f''(x)$ 在 $x_0$ 两侧变号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点，否则不是拐点。

定理4 (判别法二) 设 $f''(x_0)=0$。若 $f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点，否则要进一步判断。

例32 求下列曲线拐点与凹凸区间

(1) $y=\sqrt[3]{x}$ ；

(2) $y=3x^4-4x^3+1$。



解 (1) $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y''=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$

可疑点 $x=0$。

$x>0$时, $y''<0$; $x<0$时, $y''>0$，故曲线在$(-\infty,0)$内为凹的，在$(0,+\infty)$内为凸的，$(0,0)$为拐点。

(2) $y'=12x^3-12x^2$

$y''=36x^2-24x=12x(3x-2)$



可疑点 $x=0, 2/3$。

$0<x<2/3$时, $y''<0$; $x<0$ 或 $x>2/3$时, $y''>0$，故曲线在$(2/3,+\infty)$, $(-\infty,0)$内为凹的，在$(0,2/3)$内为凸的，$(0,1)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$ 为拐点。



安徽理工大学

ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

## §6 函数图形的描绘

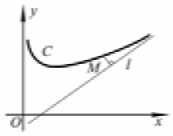
1. 渐近线

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则称$x=a$为曲线 $y=f(x)$的垂直渐近线。

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$，则称$y=a$为曲线 $y=f(x)$的水平渐近线。

(3) 若$y=ax+b$为$y=f(x)$的斜渐近线，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0$,

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0$$




得

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right]=0$$

即 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，从而

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$$

$x\to\pm\infty$ 时类似。



例33 求(1) $f(x)=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$；

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$;

(3) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

的渐近线。

解 (1) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\infty$，

故 $x=-3$为$y=f(x)$的垂直渐近线。



$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$$

故 $y=1$为$y=f(x)$ 的水平渐近线。

(2) $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x-1}=\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$$

故 $x=1$为$y=f(x)$的垂直渐近线，$y=1$为$y=f(x)$的水平渐近线。



(2) $f(x)$无垂直和水平渐近线。

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\pm1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2+1}\mp x\right]=0$$

故 $f(x)$有斜渐近线 $y=\pm x$。



2. 作图的一般步骤

(1) 讨论$f(x)$的定义域、奇偶性、周期性，并求出 $f'(x), f''(x)$。

(2) 求出$f'(x)=0, f''(x)=0$的根及$f'(x), f''(x)$不存在的点，用这些点将定义域划分为若干小区间。

(3) 确定$f'(x), f''(x)$在上述小区间内的符号，由此确定 $f(x)$在小区间内



的增减性、凹凸性，并求出极值点、拐点。

(4) 求出 $f(x)$的渐近线。

(5) 求出上述所有点的值，连点作图。

例34 作出 $f(x)=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形。

解 (1) $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,-3)$, $(-3,+\infty)$。

$$f'(x)=\frac{36(3-x)}{(x+3)^3},\ f'(x)=\frac{72(x-6)}{(x+3)^4}$$

(2) $f'(x)=0$的根为$x=3$, $f''(x)=0$的根为$x=6$, $f'(x)$, $f''(x)$ 不存在的点为 $x=-3$ 。上述点将定义域分为

$$(-\infty,-3),(-3,3),(3,6),(6,+\infty)$$



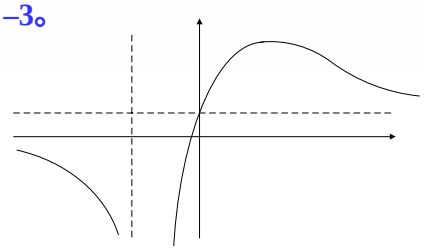
(3) 各区间内 $f'(x)$, $f''(x)$ 符号，$f(x)$的增减性、凹凸性及极值、拐点如下：

| $x$ | $(-\infty,-3)$ | $(-3,3)$ | 3 | $(3,6)$ | 6 | $(6,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | + | 0 | − | − | − |
| $f''(x)$ | − | − | − | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | ∩ | 极大点 $f(3)=4$ | ↘ | 拐点 $f(6)=11/3$ | ∪ |



(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=-\infty$

$f(x)$有水平渐近线 $y=1$，垂直渐近线 $x=-3$。



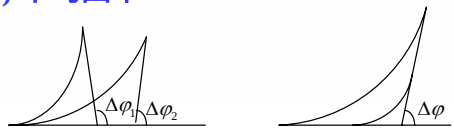


安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

# §7 曲率

1. 曲率的定义

(1) 平均曲率




由上图知，曲线段弯曲程度与曲线段切线方向变化的角度$\Delta\varphi$以及曲线段的弧长$\Delta s$有关，并且$\Delta\varphi$越大，弯曲程度越大；$\Delta s$越大，弯曲程度越小。因此可定义$\Delta\varphi$与 $\Delta s$ 之比

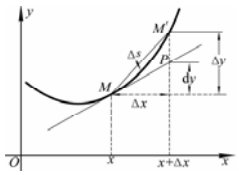
$$\overline{K}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

为平均曲率。



(2) 曲率定义

定义 如图，若 $M'$ 沿曲线趋于$M$时，






$x$

(3,4)

(6,11/3)

曲线段 $MM'$ 的平均曲率 $\overline{K}$ 有极限，则称此极限的绝对值为曲线在$M$点的曲率，记为$K$，即

$$K=\left|\lim_{M'\to M}\overline{K}\right|=\left|\lim_{M'\to M}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|$$

2. 曲率的计算

(1) 弧长的微分

如图，



$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta s}{MM'}\cdot\frac{\overline{MM'}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\Delta s}{MM'}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\overset{\frown}{MM'}}{MM'}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\overset{\frown}{MM'}}{MM'}\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$



$$=\sqrt{1+\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+y'^2}$$

从而 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$，称之为弧微分。

(2) 曲率$K$的计算公式

如图，$\tan\varphi=y'$，$\varphi=\arctan y'$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+y'^2}y'',\quad \mathrm{d}\varphi=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$$



故

$$K=\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例35 求曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的曲率。



解 $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$y''=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}-x\left(-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)}{a^2-x^2}$$

$$=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



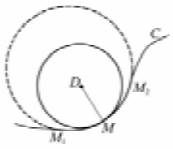
$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\left(1+\dfrac{x^2}{a^2-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a}$$

即圆的曲率为一常数。

3. 曲率圆和曲率半径

如图，在曲线 $y=f(x)$上一点 $M(x,y)$处做出其切线与法线，在法线上取 $DM=1/K$ ($K$为$M$处曲率)，记为 $\rho$，则以$D$为圆心，以 $\rho=1/K$ 为半径的圆称为$M$点处的曲率圆，$D$





称为曲率中心，$\rho$称为曲率半径。

显然，曲线 $y=f(x)$与曲率圆在$M$点处有共同的切线和曲率。

例36 曲线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点曲率半径最小？

解 $y'=2ax+b$，$y''=2a$

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2|a|}{\left[1+(2ax+b)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$



$$\rho=\frac{1}{K}=\frac{\left[1+(2ax+b)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2|a|}$$

显然，当 $2ax+b=0$ 时，即在顶点 $x=-\frac{b}{2a}$ 处，曲率最大，曲率半径最小。