安徽理工大学 ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

第4章 定积分与不定积分

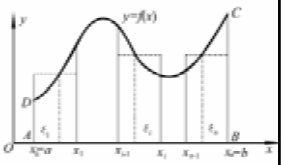
安徽理工大学 ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§1 定积分的概念

安徽理工大学

1. 引例

求曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$以及三条直线 $x=a, x=b, x$ 轴围成的曲边梯形的面积。



(1) 分割

在$[a,b]$中任意插入分点 $a=x_0<x_1$

安徽理工大学

$<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将$[a,b]$分成n个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，各区间长度记为$\Delta x_1=x_1-x_0, \Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$。

(2) 近似

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$上任取一点 ξ_i $(x_{i-1}\leq\xi_i\leq x_i)$，则小曲边梯形面积 $\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$。

安徽理工大学

(3) 求和

曲边梯形面积

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

(4) 取极限

记 $\lambda=\max\{\Delta x_i\}$，即小区间长度的最大值，则

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

安徽理工大学

2. 定积分定义

设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有界, 经分割、取点做积、求和，若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，则称 $f(x)$在$[a,b]$上可积，此极限称为 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上的定积分, 记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(1) 若 $f(x)$连续，则 $f(x)$可积。

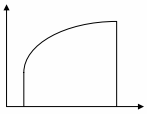
(2) 定积分仅与被积函数 $f(x)$ 及积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

3. 定积分的几何意义

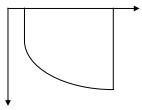
(1) $f(x)\geq 0$ 时，

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S_{曲边梯形}$



(2) $f(x)\leq 0$ 时，

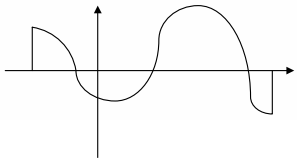
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -S_{曲边梯形}$



(3) 对一般的 $f(x)$，

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ = 所围图形面积的代

数和，即 $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$。



安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§2 定积分的性质

为了研究的需要，特规定：

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ ；

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$。

定积分的性质如下：

(1) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x =$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

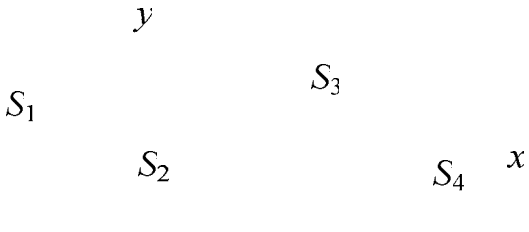
(2) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x +$

$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ $(a,b,c$ 位置不限$)$

此性质称为定积分对积分区间的可加性。

(4) $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$



证 $\int_a^b \mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$\xrightarrow{f(x)=1} \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i = b-a$

(5) 若 $f(x)\geq 0,\ x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

推论1 若 $f(x)\geq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b)$$

推论2

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| \quad (a<b)$$

(6) 设M, m为 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上的最大值、最小值，则

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

(7) (中值定理) 若 $f(x)\in C[a,b]$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证 由(6)知，

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M$$

其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上的最大和最小值。

根据介值定理，有$\xi\in[a,b]$，使

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

注 可以进一步证明，ξ 一定可以在区间内部取得，即 $\xi\in(a,b)$。

安徽理工大學
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§3 微积分基本公式

1. 变上限积分函数及其导数

定义1 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，则称 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为变上限积分。显然，此积分是积分上限x的函数，记为 $\Phi(x)$, 即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

定理1 (1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 则$\Phi(x)$在$[a,b]$上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$。

证 $\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$$

(1) 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故在 $[a,b]$上有界，即有 $M>0$，使得$|f(x)|$

$\le M$，从而

$$|\Delta\Phi(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right|\le M|\Delta x|$$

由夹逼定理，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x)=0$$

即 $\Phi(x)$ 连续。

(2) 因为 $f(x)$在$[a,b]$上连续，所以由定积分中值定理

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x} f(\xi)$$

$$=f(x)$$

即 $\Phi(x)$ 可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$。

推论1 若 $f(x)\in C[a,b]$，则

$$\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]'=-f(x)$$

推论2 若 $f(x)\in C[a,b]$，则

$$\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

证 $\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t=\Phi[\varphi(x)]$

故 $\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\Phi[\varphi(x)]\}$

$$=\Phi'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

推论3 若 $f(x)\in C[a,b]$，则

$$\left[\int_{\psi(x)}^b f(t)\mathrm{d}t\right]'=-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$$

定理2 若 $f(x)\in C[a,b]$，则

$$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=$$

$$f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$$

例1 求(1) $y=\int_1^{x^3}\sqrt[3]{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ ；(2) $y=\int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt[3]{1+x^6}\cdot 3x^2$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)-\mathrm{e}^{\sin^2 x}\cdot\cos x$

例2 求由$\int_0^y \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+\int_{x^2}^0 \sin t\,\mathrm{d}t=0$

确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$。

解 $e^{-y^2}\cdot y'+(-\sin x^2\cdot 2x)=0,$

$y'=2x\sin x^2\cdot e^{y^2}$

例3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_x^a f(t)\,dt$ ($f(x)$连续)

解 (1)原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x}=\dfrac{1}{2e}$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x)^2}{x/\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\pi^2}{4}$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\int_x^a f(t)dt+x(-f(x))}{1}$

$=-af(a)$

2. 原函数

定义2 若 $F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$为 $f(x)$的原函数。

显然，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 为$f(x)$的

原函数。

(1) 连续函数一定有原函数；

(2) 若 $F(x)$为 $f(x)$的原函数，则 $F(x)+C$ 也为 $f(x)$ 的原函数。

证 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$

(3) $f(x)$ 的任意两个原函数仅相差一个常数。

证 设 $F_1(x),F_2(x)$ 为 $f(x)$ 的任意

两个原函数，则

$[F_1(x)-F_2(x)]'=F_1'(x)-F_2'(x)$

$=f(x)-f(x)=0$

得 $F_1(x)-F_2(x)=C$ 。

综上， $F(x)+C$ 表示了 $f(x)$的所有原函数。

3. 牛顿——莱布尼兹公式

定理3 若 $f(x)\in C[a,b]$， $F(x)$ 为

$f(x)$在 $[a,b]$上的原函数，则

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\overset{\text{记为}}{=\!=}F(x)\Big|_a^b$

证 因$F(x)$ 和$\int_a^x f(t)dt$均为 $f(x)$ 的原函数，故 $F(x)-\int_a^x f(t)dt=C$。

令 $x=a$，得 $C=F(a)$，从而

$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$

再令 $x=b$，得 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§4 不定积分及性质

安徽理工大学

1. 不定积分

定义 $f(x)$的所有原函数称为$f(x)$的不定积分。

显然，$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，其中$F(x)$为$f(x)$的一个原函数。

例1 求下列不定积分：

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$

安徽理工大学

(2) $$\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C, & \mu \neq -1, \\ \ln x + C, & \mu = -1. \end{cases}$$

2. 基本积分表

由于基本积分公式是计算不定积分和定积分的基础，所以应熟记P154和P165~166中的基本积分公式。

3. 不定积分的性质

安徽理工大学

(1) $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0)$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)$

(4) $\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$

安徽理工大学

例2 求下列不定积分：

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{1}{(-2)+1}x^{(-2)+1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{(-1/2)+1}x^{(-1/2)+1} + C = 2\sqrt{x} + C$$

安徽理工大学

(3) $$\int\left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 5\arcsin x - 3\arctan x + C$$

(4) $$\int\left(\pi^x \mathrm{e}^x - \frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x = \int (\pi\mathrm{e})^x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{(\pi\mathrm{e})^x}{\ln(\pi\mathrm{e})} - \frac{1}{2}\ln x + C$$

(5) $\int \csc x(\csc x-\cot x)\mathrm{d}x$

$=\int \csc^2 x\mathrm{d}x-\int \csc x\cot x\mathrm{d}x$

$=-\cot x+\csc x+C$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$=\int \csc^2 x\mathrm{d}x+\int \sec^2 x\mathrm{d}x$

$=-\cot x+\tan x+C$

(7) $\int \cot^2 x\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x$

$=-\cot x-x+C$

(8) $\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§5 不定积分的换元积分法

一、第一类换元法(凑微分法)

1. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$,

即 $\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$。

例3 求下列不定积分

(1) $\int \sin 5x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int \sin 5x\mathrm{d}(5x)$

$\overset{5x=u}{=\!=\!=}\frac{1}{5}\int \sin u\mathrm{d}u=-\frac{1}{5}\cos(5x)+C$

(2) $\int(1-2x)^7\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^7$

$\mathrm{d}(1-2x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(1-2x)^8+C$

$=-\frac{1}{16}(1-2x)^8+C$

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(x/a)}{1+(x/a)^2}$

$=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$

$=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$

2. $\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n$,

即 $x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\mathrm{d}x^n$。

例4 求下列不定积分

(1) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/2}$

$d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(2) $\int x^2 e^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int e^{-x^3}\,d(-x^3)$

$= -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$

(3) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx = -\int \cos\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right) =$

$-\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C \left[\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

(4) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos\sqrt{x}\,d\sqrt{x}$

$= 2\sin\sqrt{x} + C \left(\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}\right)$

3. $\frac{1}{x}dx = d\ln x,\ e^x dx = de^x,$

$\sin x dx = -d\cos x, \cos x dx = d\sin x,$

$\sec^2 x dx = d\tan x, \sec x\tan x dx = d\sec x,$

$\frac{dx}{1+x^2} = d\arctan x, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\arcsin x,$

$\frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}dx = \pm d\sqrt{a^2 \pm x^2}, \cdots$

例5 求下列不定积分

(1) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$

$= -\ln\cos x + C = \ln\sec x + C$

(2) $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x}$

$= \ln\sin x + C = -\ln\csc x + C$

(3) $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$

$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$

$= \ln(\sec x + \tan x) + C$

(4) $\int \csc x dx = \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x}dx$

$= \int \frac{d(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x}$

$= \ln(\csc x - \cot x) + C$

(5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln(\ln x) + C$

(6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(\tan x + 1)} = \int \frac{d(\tan x + 1)}{\tan x + 1}$

$= \ln(\tan x + 1) + C$

(7) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x}$

$= \ln(1+e^x) + C$

安徽理工大学

$$(8)\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx$$
$$=x-\ln(1+e^x)+C$$
或 $$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\int\frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$(9)\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{de^x}{1+(e^x)^2}$$
$$=\arctan e^x+C$$
$$(10)\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\sqrt{1+x^2}}dx$$

安徽理工大学

$$=-\int e^{-\sqrt{1+x^2}}d(-\sqrt{1+x^2})$$
$$=-e^{-\sqrt{1+x^2}}+C$$

例6 求下列不定积分

$$(1)\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\int\frac{d(x+a)}{x+a}\right]$$

安徽理工大学

$$=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C$$
$$(2)\int\frac{x^2-x-2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-x-3}{1+x^2}dx$$
$$=\int\left(1-\frac{x+3}{1+x^2}\right)dx$$
$$=x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}-3\int\frac{dx}{1+x^2}$$

安徽理工大学

$$=x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-3\arctan x+C$$
$$(3)\int\frac{x-4}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2-6}{x^2-2x+5}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-2x+5)}{x^2-2x+5}-3\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)-\frac{3}{2}\arctan\frac{x-1}{2}$$
$$+C$$

安徽理工大学

$$(4)\int\sin^2 xdx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 2xd(2x)$$
$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$
$$(5)\int\sin 5x\cos 3xdx$$
$$=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx$$

安徽理工大学

$$=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$
$$(6)\int\frac{\cot x}{\ln\sin x}dx=\int\frac{\cos xdx}{\sin x\ln\sin x}$$
$$=\int\frac{d\sin x}{\sin x\ln\sin x}=\int\frac{d\ln\sin x}{\ln\sin x}$$
$$=\ln\ln\sin x+C$$
$$(7)\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \sec^2 x dx + \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

$$(8) \int \frac{dx}{\cos x + \sin x} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right) d\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left[\csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] + C$$

二、第二类换元法

1. 三角代换

例7 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

解 令 $x = a\sin t$ (或$a\cos t$)，则

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, dx = a\cos t dt$$

原式 $= \int a\cos t \cdot a\cos t dt$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t)\right]$$

$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + C$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

例8 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C$$

解 令 $x = a\sin t$，则

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, dx = a\cos t dt$$

原式 $= \int \frac{a\cos t dt}{a\cos t} = \int dt$

$$= t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

例9 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

解 令 $x = a\tan t$ (或$a\cot t$)，则

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec t, dx = a\sec^2 t dt$$

原式 $= \int \frac{a\sec^2 t dt}{a\sec t} = \int \sec t dt$

$$= \ln(\sec t + \tan t) + C$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

例10 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4}}$

解 令 $x = 2\tan t$，则

$$\sqrt{x^2+4} = 2\sec t, \mathrm{d}x = 2\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\text{原式} = \int \frac{2\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{2\tan t \cdot 2\sec t} = \frac{1}{2}\int \csc t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\ln(\csc t - \cot t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right) + C$$

例11 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

解 令 $x = a\sec t$ (或$a\csc t$)，则

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t, \mathrm{d}x = a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\text{原式} = \int \frac{a\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{a\tan t} = \int \sec t\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln(\sec t + \tan t) + C$$

$$= \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$$

例12 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$

解 令 $x = 3\sec t$，则

$$\sqrt{x^2-9} = 3\tan t, \mathrm{d}x = 3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$\text{原式} = \int \frac{3\tan t}{3\sec t} \cdot 3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$$

$$= 3\int \tan^2 t\,\mathrm{d}t = 3\int (\sec^2 t - 1)\mathrm{d}t$$

$$= 3(\tan t - t) + C$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} - \arccos\frac{3}{x}\right) + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{x} + C$$

小结 $f(x)$ 中含有 $\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}\\ \sqrt{x^2+a^2}\\ \sqrt{x^2-a^2}\end{cases}$ 时

可考虑用代换 $\begin{cases}x = a\sin t & \text{(弦代换)}\\ x = a\tan t & \text{(切代换)}\\ x = a\sec t & \text{(割代换)}\end{cases}$

2. 无理代换

例13 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

解 令 $\sqrt[3]{x+1} = t$，即 $x = t^3 - 1$，则 $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$。

$$\text{原式} = \int \frac{3t^2\mathrm{d}t}{1+t} = 3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$= 3\int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 3\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right] + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x+1}) + C$$

例14 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

解 令 $\sqrt[6]{x} = t$, 则 $x = t^6$, $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$

原式 $= \int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$= 6\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6(t - \arctan t) + C$$

$$= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}) + C$$

例15 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则

$$x = \frac{1}{t^2-1}, \mathrm{d}x = -\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$$

原式 $= \int (t^2-1)t\left[-\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}\right]$

$$= -2\int \frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t = -2\int\left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -2\left(t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right) + C$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} + C$$

例16 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$

解 令 $\sqrt{1+\mathrm{e}^x} = t$, 则 $x = \ln(t^2-1)$,

$$\mathrm{d}x = \frac{2t\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

原式 $= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} + C$$

$$= \ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1} + C$$

3. 倒代换

例17 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$

解 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $\frac{1}{x(x^6+1)} = \frac{t^7}{1+4t^6}$,

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

原式 $= -\int \frac{t^5\mathrm{d}t}{1+4t^6} = -\frac{1}{24}\int \frac{\mathrm{d}(4t^6+1)}{4t^6+1}$

$$=-\frac{1}{24}\ln(4t^6+1)+C$$

$$=\frac{1}{24}\ln\frac{x^6}{x^6+4}+C$$

或 原式 $=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^5}{x^6+4}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}\ln x-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$$

安徽理工大學
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§6 不定积分的分部积分法

引例 计算$\int x\cos x\mathrm{d}x$。

显然，$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x$ 不易计算，但$\int\sin x\mathrm{d}x$却易计算。

分部积分公式

由$(uv)'=u'v+uv', uv'=(uv)'-u'v$

得$\int uv'\mathrm{d}x=\int(uv)'\mathrm{d}x-\int u'v\mathrm{d}x$，故

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

（前后相乘） （前后交换）

注 (1) 当被积函数为不同类型函数乘积时，可考虑用分部积分法；

(2) 分部积分的关键是选取合适的 u 和 $\mathrm{d}v$。

例18 $\int x\cos x\mathrm{d}x$

$$=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x$$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

例19 $\int x\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\cos 2x$

$$=-\frac{1}{2}\left(x\cos 2x-\int\cos 2x\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

例20 $\int xe^{-\frac{x}{3}}\mathrm{d}x=-3\int x\mathrm{d}e^{-\frac{x}{3}}$

$$=-3\left(xe^{-\frac{x}{3}}-\int e^{-\frac{x}{3}}\mathrm{d}x\right)$$

$$=-3xe^{-\frac{x}{3}}+3\cdot(-3)\int e^{-\frac{x}{3}}\mathrm{d}\left(-\frac{x}{3}\right)$$

$$=-3xe^{-\frac{x}{3}}-9e^{-\frac{x}{3}}+C$$

例21 $\int x^2 e^{-x} dx = -\int x^2 de^{-x}$

$= -\left(x^2 e^{-x} - \int e^{-x} dx^2 \right)$

$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx$

$= -x^2 e^{-x} - 2\int x de^{-x}$

$= -x^2 e^{-x} - 2\left(x e^{-x} - \int e^{-x} dx \right)$

$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$

$= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$

例22 $\int \ln x dx = x \ln x - \int x d\ln x$

$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x \ln x - x + C$

或 令 $\ln x = t$, 即 $x = e^t$

原式 $= \int t de^t = te^t - \int e^t dt$

$= te^t - e^t + C$

$= x \ln x - x + C$

例23 $\int x \ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x - \int x^2 d\ln x \right)$

$= \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right)$

$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$

或 令 $\ln x = t$, 即 $x = e^t$,

原式 $= \int te^{2t} dt$

例24 $\int \arcsin x dx$

$= x \arcsin x - \int x d\arcsin x$

$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

$= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$

$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$

或 令 $\arcsin x = t$, 即 $x = \sin t$

原式 $= \int t d\sin t = t \sin t - \int \sin t dt$

$= t \sin t + \cos t + C$

$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$

例25 $\int e^x \sin x dx$ (特殊类型)

$= \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

$= e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d\cos x$

$= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx$

故原式 $= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$ 。

例26 $\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\tan x$

$= x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}x$

$= x\tan x - \ln\sec x + C$

例27 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xrightarrow{\sqrt{x}=t,\ x=t^2}$

$= \int 2t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2(t-1)\mathrm{e}^t + C$

$= 2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C$

例28 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) -$

$\int x\cdot\frac{1+x/\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§7 两种特殊类型的积分

1. 有理函数的积分

有理函数 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$

可用待定系数法化为部分分式，然后积分。

例29 将 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}$ 化为部分分式，并计算 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$。

解 $\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} =$

$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$

由 $\begin{cases} A+B=1, \\ 3A+2B=-3, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} A=-5, \\ B=6, \end{cases}$

故 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

$= -5\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} + 6\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3}$

$= -5\ln(x-2) + 6\ln(x-3) + C$

或 $I=\frac{1}{2}\int\frac{2x-5+11}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6}+\frac{11}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6}$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2-5x+6)+\frac{11}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\ln(x^2-5x+6)+\frac{11}{2}\ln\frac{x-3}{x-2}+C$

例30 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)^2}=-\int\frac{x-1-x}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$

$=-\int\left[\frac{1}{x(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=-\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$=\ln\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}+C$

例31 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$

例32 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x-\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}-\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right)$

$+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x^2+1+\sqrt{2}x}\right)$

$+C$

2. 三角有理函数的积分

对三角有理函数积分

$$I=\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan u$，

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

故 $I=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，三角函数有理式积分即变成了有理函数积分。

例33 $\int\frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos x}$

解 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan u$,

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

$$\text{原式}=\int\frac{1}{3+5\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\frac{2+u}{2-u}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}+C$$

例34 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$

解 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan u$,

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$\text{原式}=\int\frac{1}{2\frac{2u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+5}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}u}{3u^2+2u+2}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{3}\right)}{\left(u+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\frac{u+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\arctan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$$

例35 $\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1+u^2+2u}{u^2(u^2+1)}\mathrm{d}u$$

$$=\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u(1+u^2)}\right)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{u}+2\int\left(\frac{1}{u}-\frac{u}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{u}+2\ln u-\ln(1+u^2)+C$$

$$=-\cot\frac{x}{2}+2\ln\sin\frac{x}{2}+C$$

或 $\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}+\int\frac{\mathrm{d}(1-\cos x)}{1-\cos x}$

$$=\int\csc^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\frac{x}{2}+\ln(1-\cos x)$$

$$=-\cot\frac{x}{2}+\ln(1-\cos x)+C$$

安徽理工大學 ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§8 定积分的换元法

定理 设 $f(x)\in C[a,b]$, $\varphi(t)$ 满足 (1) $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$, 且当 $\alpha\le t\le\beta$ 时，$a\le\varphi(t)\le b$; (2) $\varphi(t)$在 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续。若令 $x=\varphi(t)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

注 在定积分换元法中，不必将换元后的新变量换回原来变量。但积分限必须换成新变量的上下限。

例36 $\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$

解 令 $x=a\sin t$，则

$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$

$x=0,t=0;\ x=a,t=\frac{\pi}{2}$

原式 $=\int_0^a a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2$$

例36 $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

解 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$

$x=1,t=1;\ x=4,t=2$

原式 $=\int_1^2\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t}=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$

$$=2[t-\ln(1+t)]\Big|_1^2=2\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)$$

例37 $\int_0^\pi\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^\pi\sqrt{\sin^3x\cos^2x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^3x\cos^2x}\mathrm{d}x$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin^3 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\,\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\,\mathrm{d}\sin x$$

$$=\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}$$

例38 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\geq 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0 \end{cases}$

求 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$。

解 令 $t=x-2$，则 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^2 te^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-t^2}\mathrm{d}(-t^2)$$

$$=\tan\frac{t}{2}\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^2=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}+\frac{1}{2}$$

例39 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续。

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$$

证 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$

$$+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

对 $\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x$，令 $x=-t$，则

$$\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}(-t)$$

$$=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$$

得 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$。

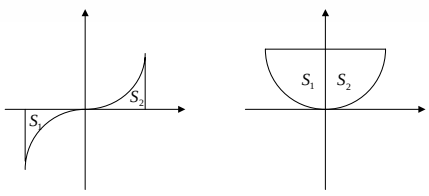
若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，

故 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$。

若 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$，

故 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$。

上述结论的几何解释：



例40 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \sin^2 x}\,dx$

$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} x\,d\cos x$

$= -\frac{4}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}$

例41 $\int_{-3}^{3} (x^3+4)\sqrt{9-x^2}\,dx$

$= 8\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = 8\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 3^2 = 18\pi$

例42 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$。

证 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，则

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]d\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

安徽理工大学 ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§9 定积分的分部积分法

定积分分部积分公式：

$$\int_a^b u\,dv = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

例43 $\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e \ln x\,dx^2$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

例44 $\int_0^1 x\arctan x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x\,dx^2$

$= \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_0^1 = \frac{\pi-2}{4}$

例45 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$

解 令$\sqrt{x}=t$，即$x=t^2$，则

$$\text{原式}=\int_0^1 e^t\,2tdt=2\int_0^1 t de^t$$

$$=2\left(te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt\right)$$

$$=2e-2e^t\Big|_0^1=2$$

或 $\text{原式}=2(t-1)e^t\Big|_0^1=2$。

例46 证明：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

记为$\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\end{cases}$

证 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x d\cos x$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cos x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)dx$$

$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

故 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}I_{n-4}$

$$=\cdots=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot I_0, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot I_1, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

又 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{\pi}{2}$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1$，

得 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇}\end{cases}$

例47 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x dx$

$$=\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\times1}{4\times2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$$

例48 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x dx$

$$=\frac{6!!}{7!!}=\frac{6\times4\times2}{7\times5\times3\times1}=\frac{16}{35}$$

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§10 广义积分

安徽理工大学

1. 无穷限广义积分

定义 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x =$

$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 f(x)\mathrm{d}x$

安徽理工大学

若上述极限存在，则称这些广义积分**收敛**，否则称其**发散**。

例49 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

例50 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$

解 $p=1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$

安徽理工大学

$p\neq 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}$

$$= \begin{cases} +\infty, & p<1 \\ \dfrac{1}{p-1}, & p>1 \end{cases}$$

故$p\leq 1$时，积分发散；$p>1$时，积分收敛。

安徽理工大学

2. 无穷限广义积分的极限审敛法

设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续，$f(x)\geq 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^m f(x) = k$。

(1) 若 $0\leq k<+\infty, m>1$，则

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

收敛。

(2) 若 $0<k\leq+\infty, m\leq 1$，则

安徽理工大学

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

发散。

积分区间为$(-\infty,b],(-\infty,+\infty)$时有类似的法则。

例51 判别下列广义积分的敛散性

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{3x^4-x^2+1}\mathrm{d}x$ ；

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$。

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f(x)=\dfrac{1}{3}$

故广义积分收敛。

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x)=0$

故广义积分收敛。

3. 无界函数广义积分(瑕积分)

定义 设 $f(x)$在a的右邻域内无界，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x$。$a$称为瑕积分的瑕点。

设 $f(x)$ 在b的左邻域内无界，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x$$

设 $f(x)$ 在c的某邻域内无界，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

若上述极限存在，则称这些广义积分收敛，否则称其发散。

例52 $\int_0^a \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^a=\dfrac{\pi}{2}$

例53 $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$

解 $p=1$时，$\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}=\ln x\Big|_0^1=+\infty$

$p\neq 1$ 时，$\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}=\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_0^1$

$$=\begin{cases}+\infty, & p>1\\ 1/(1-p), & p<1\end{cases}$$

故 $p\geq 1$时，积分发散； $p<1$时，积分收敛于 $1/(1-p)$。

4. 瑕积分的极限审敛法

设 $f(x)\in C_{[a,b)}$，$x=b$ 为瑕点，且

$$\lim_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k$$

(1) 若$0\leq k<+\infty, 0<m<1$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛。

(2) 若 $0<k\leq+\infty, m\geq 1$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

发散。

瑕点为 $x=a, x=c(a<c<b)$ 时有类似的审敛法则。

例54 判别下列广义积分的敛散性

(1) $\int_0^1 \dfrac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$ ；

(2) $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

安庆师范大学

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0,\ \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln x}=\infty$$

所以 $x=0$ 不是瑕点，$x=1$是瑕点。

又 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\dfrac{1}{-\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=1$，故

$\int_0^1\dfrac{1}{-\ln x}\mathrm{d}x$发散，$\int_0^1\dfrac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$也发散。

安庆师范大学

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}=0$, $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 收敛

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=1$，$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

也收敛，故原广义积分收敛。