安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

# 第5章 定积分的应用

由定积分的实际背景可知，许多实际问题都可以转化为定积分，如某些几何问题和物理问题等。这其中的关键是如何将待解决的问题转化为定积分。

为此，本章首先介绍定积分的微元法，然后根据微元法讨论定积分在几何和物理上的应用。



几何应用包括：平面图形的面积；立体的体积；平面曲线的弧长；旋转体的侧面积。

物理应用包括：变力沿直线所做的功；液体的侧压力；引力。



安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

## §1 定积分的微元法

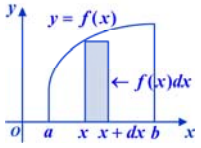
本节讨论下列两个问题：

(1) 具有什么特点的问题可以用定积分求解；

(2) 如何用定积分求解？

首先回顾一下用定积分计算曲边梯形面积的过程。

**引例** 在如图所示的曲边梯形中，$f(x)$






连续且 $f(x)\geqslant 0$，则曲边梯形的面积可通过下列四个步骤求得：

(1) 分割；

(2) 近似：$\Delta S \approx f(x)\mathrm{d}x$；

(3) 求和：$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S$；

(4) 取极限：

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

上述问题具有下列两个特点：

(1) 面积 $S$ 与区间$[a,b]$有关；

(2) 面积$S$ 可表示为分割后的小曲边梯形面积的和，即 $S$ 具有可加性。

在将曲边梯形的面积转化为定积分的四个步骤中，最关键的是第二步——近似，即积分表达式$f(x)\mathrm{d}x$的确定。



引例中近似的原则是——以直代曲。用小矩形近似小曲边梯形，从而

$$\Delta S \approx f(x)\mathrm{d}x$$

需要说明的是，并不是任意一个近似都可以做为积分表达式。可以证明：只有当$\Delta S$ 和$f(x)\mathrm{d}x$ 为$\mathrm{d}x\to 0$时的等价无穷小，即$\Delta S - f(x)\mathrm{d}x = o(\mathrm{d}x)$时，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$才确实等于曲边



梯形的面积。

下面利用积分中值定理说明引例中的近似满足上述要求。

$$\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{\Delta S - f(x)\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$$

$$= \lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{\int_x^{x+\mathrm{d}x} f(t)\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - f(x)$$

$$= \lim_{\xi\to x} f(\xi) - f(x)$$



$$= f(x) - f(x) = 0$$

即$\Delta S - f(x)\mathrm{d}x = o(\mathrm{d}x)$。

从上述引例中归纳出的结论具有一般性。下面给出利用定积分求某个量 $U$ 的条件和步骤。

(1) 要求量 $U$ 与某自变量的变化区间$[a,b]$有关；

(2) 要求量 $U$ 对区间$[a,b]$具有可



加性；

(3) 要求$[x,x+\mathrm{d}x]$上的部分量 $\Delta U$ 可近似表示为 $f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{记为}} \mathrm{d}U$，且

$$\Delta U - f(x)\mathrm{d}x = o(\mathrm{d}x)$$

当上述要求均满足时，则

$$U = \int_a^b \mathrm{d}U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

其中$\mathrm{d}U$称为$U$的微元或元素，这种分析方法称为微元法或元素法。



熟悉微分概念的同学不难发现，微元 $\mathrm{d}U$ 其实就是$U$ 的微分。

微元法的关键是如何正确地确定微元。确定微元的主要方法是：以直代曲；以不变代变。

在几何、物理和力学中，微元的常见形状有：条、带、环、扇、片、壳等。

微元法不仅是一种解决定积分应用的重要工具，更是一种思想方法，蕴含了“化整为零，以常代变，积零为整，无限累加”这一深刻的哲学思想，充分体现了分割与求和的辩证统一关系。



安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

# §2 定积分的几何应用

## 一、平面图形的面积

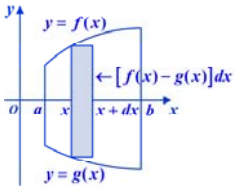
### 1. 直角坐标系中平面图形的面积

若平面图形由两条曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$及两条直线 $x=a, x=b$围成，其中 $f(x), g(x)$在 $[a,b]$ 上连续，$f(x) \geqslant g(x)$，则该平面图形的面积

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$



**证** 如图，根据以直代曲的原则，将与$[x, x+\mathrm{d}x]$对应的小图形近似看成矩形，则其面积



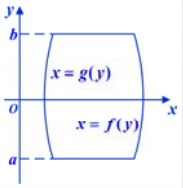

$$\Delta S \approx [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \mathrm{d}S$$

故平面图形面积

$$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$



类似地，由两条曲线 $x=f(y), x=g(y)\,(f(y) \geqslant g(y))$，两条直线 $y=a, y=b$ 所围平面图形面积

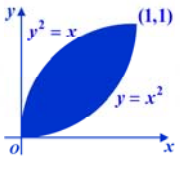



$$S=\int_a^b [f(y)-g(y)]\mathrm{d}y$$

**例1** 求由抛物线 $y^2=x, y=x^2$ 所围图形的面积。



**解** 由 $\begin{cases} y^2=x \\ y=x^2 \end{cases}$ 得交点(0,0), (1,1),




故 $S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

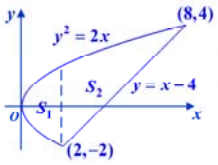
**例2** 求由抛物线 $y^2=2x$，直线 $y=x-4$所围图形的面积。

解 由 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得交点 $(2,-2),(8,4)$,

故 $S = S_1 + S_2 =$

$$\int_0^2 \left[\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x})\right] dx + \int_2^8 \left[\sqrt{2x} - (x-4)\right] dx$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{2}\, x^{3/2}\Big|_0^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\, x^{3/2}\Big|_2^8 - \left(\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Big|_2^8$$






$= 18$ 。

或 取 $y$ 做为积分变量，则

$$S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy$$

$$= \int_{-2}^4 \left[(y+4) - \frac{y^2}{2}\right] dy = 18$$

注 在用直角坐标求面积时，要根据图形的形状选择适当的积分变量。



当围成平面图形的边界曲线为参数方程时，面积的计算过程类似。只不过相当于对定积分做了换元。

例3 求椭圆的 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 面积。

解 $S = 4S_1 = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$

$$\xlongequal{x = a\sin t} 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$



$$= 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

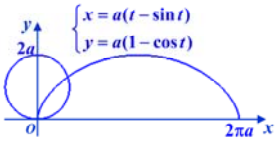
例4 求由摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

的一拱 $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 $x$ 轴所围图形的面积。



解 如图，




$$S = \int_0^{2\pi a} y\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\, dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\, dt$$

$$= a^2 \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt\right) = 3\pi a^2$$



或 $S = \int_0^{2\pi a} y\, dx$

$$= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\, dt$$

$$= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2} dt \xlongequal{\frac{t}{2} = u} 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 u\, du$$

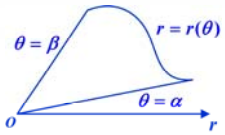
$$= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u\, du$$

$$= 16a^2 \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$$

## 2. 极坐标系中平面图形的面积

由一条连续曲线$r=r(\theta)$与两条射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta\ (\alpha<\beta)$ 围成的曲边扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$




**证** 首先考虑在极坐标中，曲边扇形如何分割，如何进行近似。



由于在直角坐标系中，我们是用直线 $x=x_i$ 将图形分割为若干个小曲边梯形，所以在极坐标系中，应该是用射线 $\theta=\theta_i$ 将图形分割为若干个小曲边扇形。

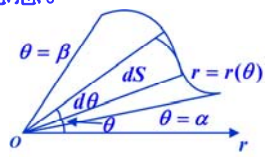
在直角坐标系中，我们是用直线 $y=y_i$ 代替曲线 $y=f(x)$。因此, 在极坐标系中，也应该是用 $r=r_i$ (圆弧)代



替曲线$r=r(\theta)$，即用小扇形代替小曲边扇形。

从上述分析中可见，极坐标中的的“直”实际上为圆弧，这其中暗含了“大直若屈”的思想。

如图，将与 $[\theta,\theta+d\theta]$对应的小图形近似为扇形，则





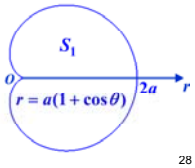

$$\Delta S\approx\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}S$$

故

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

**例5** 求心脏线$r=a(1+\cos\theta)$所围图形的面积。

**解** 令 $r=a(1+\cos\theta)=0$, 得$\cos\theta=-1,\theta=\pi$。






$$S=2S_1=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[a(1+\cos\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi a^2+a^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a^2$$

**注** 在用极坐标求平面图形面积时，要根据曲线方程求出积分的上、下限。



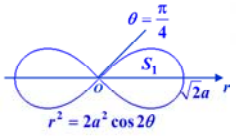
**例6** 求双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$所围图形的面积。

**解** 令 $r^2=2a^2\cos 2\theta=0$，得

$\cos 2\theta=0,\theta=\frac{\pi}{4}$。

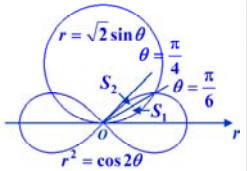
$S=4S_1$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$



$$= 2a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2$$

例7 求 $r = \sqrt{2}\sin\theta,\ r^2 = \cos 2\theta$ 所围图形的面积。




解 由 $\begin{cases} r = \sqrt{2}\sin\theta \\ r^2 = \cos 2\theta \end{cases}$，

得 $\sin\theta = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{6}$。



$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sqrt{2}\sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta$$



$$= \frac{1}{4}\sin 2\theta \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

故 $S = 2(S_1 + S_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$。



## 二、立体的体积

### 1. 截面积为已知的立体的体积

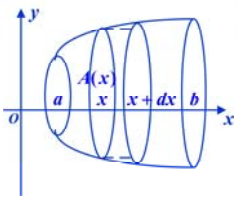
设空间立体介于平面 $x = a$ 和 $x = b$ $(a < b)$ 之间，垂直于 $x$ 轴的平面截立体所得的截面面积为 $A(x)$，且 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则该立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$



证 将对应于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的小立体近似为以 $A(x)$ 为底，以 $\mathrm{d}x$ 为高的柱体，则小立体的体积为 $\Delta V \approx A(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}V$，故立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$



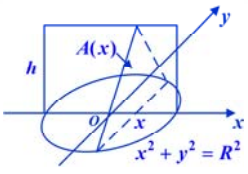



例8 求以半径为 $R$ 的圆为底，平行且等于底圆直径的线段为顶，高为 $h$ 的正劈锥体的体积。

解 取坐标如图，则底圆方程为 $x^2 + y^2 = R^2$，截面面积

$$A(x) = \frac{1}{2}(2y)h$$

$$= h\sqrt{R^2 - x^2}$$



故 $V=\int_{-R}^{R}A(x)\mathrm{d}x=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$

$=2R^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{\pi R^2h}{2}$

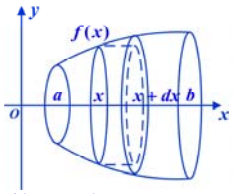
**2. 旋转体的体积**

由连续曲线 $y=f(x)\big(f(x)\geqslant 0\big)$, 直线 $x=a, x=b\ (a<b)$ 及 $x$ 轴所围曲边梯形绕 $x$ 轴旋转一周而成的旋转体



体积为

$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$




证 如图，将与小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 对应的小旋转体近似看成圆柱体，则

$\Delta V\approx\pi f^2(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}V$

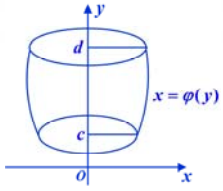
故旋转体的体积为

$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$



同理，由连续曲线 $x=\varphi(y)$, 直线 $y=c, y=d\ (c<d)$ 及 $y$ 轴所围曲边梯形绕 $y$ 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$V=\pi\int_c^d\varphi^2(y)\mathrm{d}y$






**注** 上述两种直接可用公式计算的均属于标准情况，即旋转轴是曲边梯形的一个边，且与曲边相对。对于非标准情况，通常可以将其转换为标准情况。

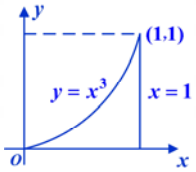
**例9** 求 $y=x^3, x=1$ 及 $x$ 轴所围图形分别绕 $x, y$ 轴旋转而成的旋转体的体积。



**解** 由 $\begin{cases}y=x^3\\x=1\end{cases}$ 得交点 $(0,0),(1,1)$。

$V_x=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x$

$=\pi\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{7}$




$V_y=\pi\cdot1^2\cdot1-\pi\int_0^1 x^2\mathrm{d}y$

$=\pi-\pi\int_0^1 y^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}y=\pi-\dfrac{3}{5}\pi=\dfrac{2}{5}\pi$

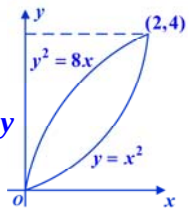


**例10** 求 $y=x^2$, $y^2=8x$ 所围图形绕 $y$ 轴旋转而成的旋转体的体积。

**解** 由 $\begin{cases}y=x^2\\y^2=8x\end{cases}$ 得交点 $(0,0),(2,4)$.

$V=V_1-V_2$

$=\pi\int_0^4 x_1^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^4 x_2^2\mathrm{d}y$



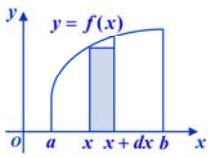
$$= \pi\int_0^4 y\mathrm{d}y - \pi\int_0^4 \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{24}{5}\pi$$

**例11** 证明：由连续曲线 $y = f(x)$ $\big(f(x) \geqslant 0\big)$，直线 $x = a, x = b\ (a < b)$ 及 $x$ 轴所围曲边梯形绕 $y$ 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$



**证** 如图，取$x$为积分变量，则$x \in [a,b]$。在$[a,b]$上任取小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，则与$[x, x+\mathrm{d}x]$对应的小曲边梯形绕$y$轴旋转一周所得的旋转体近似于$[x, x+\mathrm{d}x]$上高为$f(x)$的小矩形绕$y$轴旋转一周所得的旋转体。该旋转体为一个环状圆柱体，其中



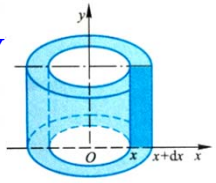



底圆内径为$x$，外径为$x+\mathrm{d}x$，高为$f(x)$，其体积

$$\Delta V \approx 2\pi x f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}V$$

从而旋转体的体积为

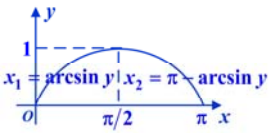
$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$




**例12** 求 $y = \sin x\ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 $x$ 轴所围成的平面图形绕 $y$ 轴旋转而成的旋转体的体积。



**解** 所求旋转体的体积等于由 $x_2 = \pi - \arcsin y$，$y = 1$，$x$ 轴和$y$轴所围曲边梯形绕 $y$ 轴旋转而成的旋转体的体积 $V_2$ 与由 $x_1 = \arcsin y$，$y = 1$，$x$ 轴和$y$轴所围曲边梯形绕 $y$ 轴旋转而成的旋转体的体积 $V_1$ 的差，即






$$V = V_2 - V_1 = \pi\int_0^1 x_2^2\mathrm{d}y - \pi\int_0^1 x_1^2\mathrm{d}y$$

$$= \pi\int_0^1 (\pi - \arcsin y)^2\mathrm{d}y - \pi\int_0^1 (\arcsin y)^2\mathrm{d}y$$

$$= \pi^3 - 2\pi^2\int_0^1 \arcsin y\mathrm{d}y$$

$$= \pi^3 - 2\pi^2\left(y\arcsin y\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\right)$$

$$= -2\pi^2\sqrt{1-y^2}\Big|_0^1 = 2\pi^2$$



或 $V = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

$$= 2\pi\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x = -2\pi\int_0^\pi x\mathrm{d}\cos x$$

$$= -2\pi\left(x\cos x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x\right)$$

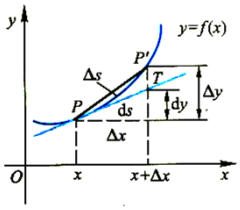
$$= -2\pi\left(-\pi - \sin x\Big|_0^\pi\right) = 2\pi^2$$

显然，方法二的计算过程远比方法一简单。

## 三、平面曲线的弧长

### 1. 直角坐标情形

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上导数连续，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的弧长为




$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$



**证** 如图，取$x$为积分变量，则$x\in[a,b]$。在$[a,b]$上任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，则与$[x,x+\mathrm{d}x]$对应的小段曲线$PP'$的弧长$\Delta s$近似等于曲线$y=f(x)$在点$P(x,f(x))$处的切线上的线段$PT$的长度，即$\Delta s\approx\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$，从而所求弧长为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$



**例13** 求曲线 $y=\ln x$ 在 $[\sqrt{3},\sqrt{8}]$ 上的弧长。

**解** $y'=\dfrac{1}{x}$，$s=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$

令 $\sqrt{1+x^2}=t$，即 $x=\sqrt{t^2-1}$，

则 $\mathrm{d}x=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$，



$$s=\int_2^3\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t=1+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^3$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

有兴趣者也可以尝试用三角代换进行计算。



### 2. 参数方程情形

设曲线段 $y=f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

其中 $x(t),y(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上导数连续，则曲线段 $y=f(x)$ 的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$



**证** 显然，弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$

$$=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

故所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

**例14** 求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{cases}$ 的全

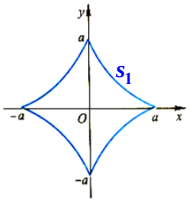
长。

解 $\mathrm{d}x=-3a\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}y=3a\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$

$=3a\left|\sin t\cos t\right|\mathrm{d}t$




故所求弧长为

$$s=4s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\left|\sin t\cos t\right|\mathrm{d}t$$



$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}\sin t=6a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$

**3. 极坐标情形**

设曲线段的极坐标方程为$r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$, 其中$r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上导数连续，则该曲线段的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$



证 该曲线段的参数方程为

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta\end{cases}(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

则 $\mathrm{d}x=\left[r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta$

$\mathrm{d}y=\left[r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta$

代入 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$，得

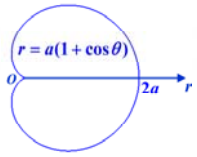
$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$



故所求弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

例15 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$的全长。




解 $\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}$

$$=\sqrt{\left[a(1+\cos\theta)\right]^2+(-a\sin\theta)^2}$$



$$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

故所求弧长为

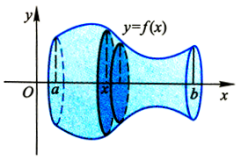
$$s=2\int_0^\pi\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi=8a$$



**四、旋转体的侧面积**

设函数 $y=f(x)$ $\left(f(x)\geqslant 0\right)$在区间$[a,b]$上导数连续，则曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$, $x$ 轴所围成的曲边梯形绕 $x$ 轴旋转一周而成的旋转体的侧面积为




$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

**证** 如图，取$x$为积分变量，则$x\in[a,b]$。在$[a,b]$上任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，则与$[x,x+\mathrm{d}x]$对应的小曲边梯形绕$x$轴旋转一周而成的小旋转体的侧面积近似等于分别以圆周长$2\pi f(x)$和弧长$\mathrm{d}s=\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$为边长的矩形面积，即侧面积微元

$$\mathrm{d}S=2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$$



故旋转体的侧面积为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$$

**注** 之所以不直接用简单的自变量微分$\mathrm{d}x$而是用复杂的弧长微分$\mathrm{d}s$近似代替曲线弧，其原因是为了保证

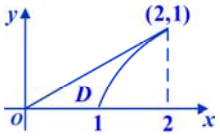
$$\Delta S-\mathrm{d}S=o(\mathrm{d}x)$$

具体形象的解释见辅导书P235。



**例16** 求由直线$y=\frac{1}{2}x$，曲线$y=\sqrt{x-1}$及$x$轴所围成的平面图形$D$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的表面积。

**解** $y=\frac{1}{2}x$与$y=\sqrt{x-1}$的交点为$(2,1)$。






由$y=\sqrt{x-1}$ $(1\leqslant x\leqslant 2)$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的表面积为

$$S_1=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$$



由$y=\frac{1}{2}x(0\leqslant x\leqslant 2)$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的表面积为

$$S_2=2\pi\int_0^2\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^2 x\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi$$

故所求表面积为$S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

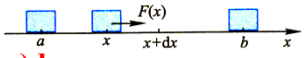


安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

## §3 定积分的物理应用

## 1. 变力沿直线所做的功

设物体在连续变力$F(x)$作用下沿$x$轴从点$x=a$运动到点$x=b$，且力的方向与运动方向平行，则变力所做的功为




$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

**证** 取$x$为积分变量，则$x\in[a,b]$，在$[a,b]$上任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，将



此小区间对应的变力近似看成点$x$处的常力，则此小区间对应的功为

$$\Delta W\approx F(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}W$$

故所求功为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

**例17** 直径为20厘米，高为80厘米的圆柱体内充满压强为10牛/厘米$^2$的蒸汽，在等温条件下，要使气体体



积缩小一半，问需要作多少功？

**解** 在等温条件下，压强$P$和体积$V$满足方程$PV=K$(常数)。

在初始状态，




$$P=10^5\ \text{牛}/\text{米}^2$$

$$V=\pi\times0.1^2\times0.8$$

故$K=800\pi$。

因为活塞在$x$处时，气体所受的



力为$F(x)=P(x)S=\dfrac{K}{V(x)}S$

$$=\frac{K}{(0.8-x)S}S=\frac{K}{0.8-x}$$

故所求力为

$$W=\int_0^{0.4}F(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{0.4}\frac{K}{0.8-x}\mathrm{d}x=800\pi\ln 2$$



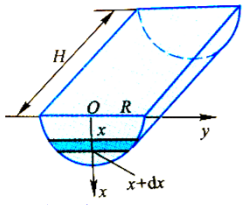
**例18** 如图，一半圆柱形水槽的长为$H$，截面半径为$R$。若水槽盛满了水，求把水全部抽尽需做的功$W$。(水的密度为$\rho$)

**分析** 如果将水抽出水槽外，必须克服水的重力。由于水位不同，重力有变化，故本题为变力做功问题。但本题与前例不同，不可直接用公式，



而是要用微元法计算。

**解** 如图，建立坐标系。在水槽截面上，圆周的方程为




$$x^2+y^2=R^2(x\geqslant 0)$$

取$x$为积分变量，变化区间为$[0,R]$。在$[0,R]$上任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，对应此区间上的薄水层的体积近似为

$\Delta V \approx 2H\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$，其重量近似为

$$2\rho g H\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

将此层水提升高度$x$而被抽出水槽外时，克服重力所做的功近似为

$$\Delta W \approx 2\rho g H x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}W$$

故所求的功为

$$W = 2\rho g H\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\rho g H R^3$$



## 2. 液体侧压力

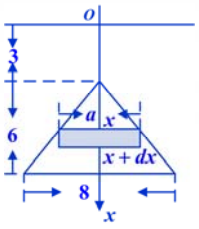
若平板非水平地置于液体中，则在不同深度处，平板上的压强不同，平板一侧所受压力不能简单地用帕斯卡定律求得，而要用微元法计算。

**例19** 一底为8m，高为6m的等腰三角形片，垂直沉没在水中，顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面3



m，求它每面所受压力。(水密度为$\rho$)

**解** 如图，三角片上对应于$[x, x+\mathrm{d}x]$的小窄条上各点处压强不同。现将其近似看作是相同的，不妨以 $x$ 处的压强代之，即压强 $\approx \rho g x$。




再将小窄条近似看成矩形，即面



积 $\approx a\cdot\mathrm{d}x$，而

$$\frac{a}{8}=\frac{x-3}{6},\quad a=\frac{4}{3}(x-3)$$

故小窄条所受的水压力为

$$\Delta F \approx \rho g x\cdot\frac{4}{3}(x-3)\mathrm{d}x = \mathrm{d}F$$

故所求水压力为

$$F = \frac{4}{3}\rho g\int_3^9 (x^2-3x)\mathrm{d}x = 168\rho g(\mathrm{N})$$



**例20** 洒水车的水箱是一个横放的椭圆柱体，其顶头面的长、短轴分别为$b$m和$a$m。当水箱是装满水时，求顶头面所受的压力。(水密度为$\rho$)

**解** 如图，建立坐标系，取$x$为积分变量，则$x$的变化范围为$[-a,a]$。

在$[-a,a]$上任取小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，对应于$[x, x+\mathrm{d}x]$的窄条所受的压强近

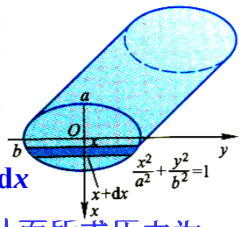


似为$\rho g(a+x)$，窄条的面积近似为

$$2y\mathrm{d}x = 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

窄条所受压力近似为

$$\frac{2b\rho g(a+x)}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$




上式即为压力微元，从而所求压力为

$$F = \frac{2b\rho g}{a}\int_{-a}^{a}(a+x)\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 4b\rho g\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \ (\text{对称性})$$

$$= 4b\rho g \cdot \frac{1}{4}\pi a^2 = \pi a^2 b\rho g(\mathrm{N})$$

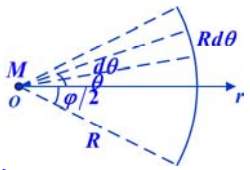
### 3. 引力

对于两质点间的引力可以用万有引力定律计算。但对于细棒对质点的引力则只能通过微元法进行计算。



**例21** 设有一半径为$R$，中心角为$\varphi$的圆弧形细棒，其线密度为$\rho$。在圆心处有一质量为$m$的质点$M$，求细棒对质点$M$的引力。

**解** 如图，建立极坐标系。由对称性，圆弧对质点的引力在$y$方向上的分力$F_y = 0$。






将对应于$[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$的小圆弧段近似看成质点，其质量为$Rd\theta \cdot \rho$，它对质点引力的大小

$$\Delta F \approx k\frac{m \cdot R\rho d\theta}{R^2}$$

其中$k$为引力常数。

$\Delta F$ 在$x$轴上的分力为

$$\Delta F_x \approx \Delta F \cdot \cos\theta$$



故 $F$ 在 $x$ 轴上的分力为

$$F_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{km\rho}{R}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2km\rho}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$$