安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

第6章 常微分方程

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§1 基本概念

安徽理工大学

引例 设曲线 $y=y(x)$ 过原点，且曲线上任一点的切线斜率等于该点横坐标的平方，求曲线方程。

解 依题意，有

$$\begin{cases} y'(x)=x^2 & (1) \\ y(0)=0 & (2) \end{cases}$$

对(1)积分，

$$\int y'(x)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x$$

安徽理工大学

即 $y(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ (3)

又 $y(0)=0$，代入得 $C=0$，故曲线方程为

$$y(x)=\frac{1}{3}x^3 \quad (4)$$

(1) 含有未知函数导数的方程称为(常)微分方程，如(1)。方程中最高阶导数的阶称为微分方程的阶。

安徽理工大学

(2) 能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解，一般包括通解和特解。

(3) 解中含有任意常数，且常数的个数与方程的阶相同，这种解称为通解，如(3)。

(4) 任意常数被确定后的解称为特解，如(4)。

安徽理工大学

(5) 确定任意常数的条件称为初始条件，如(2)。

(6) 求微分方程满足初始条件的特解问题称为初值问题，如(1)和(2)。

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§2 一阶微分方程的常见类型

安徽理工大学

1. 可分离变量方程

若一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 可化为 $p(x)\mathrm{d}x=q(y)\mathrm{d}y$，则称之为**可分离变量方程**。

设 $p(x),q(y)$ 的原函数为 $P(x),Q(y)$，则 $\int p(x)\mathrm{d}x=\int q(y)\mathrm{d}y$，即通解为

$$P(x)=Q(y)+C$$

例1 求 $y'=y$ 的通解。

安徽理工大学

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}x\ (y\neq 0),$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\mathrm{d}x,\ \ln|y|=x+C,$$

$$|y|=\mathrm{e}^{x+C}=C_1\mathrm{e}^{x}\ \ (C_1>0)$$

$$y=\pm C_1\mathrm{e}^{x}=C\mathrm{e}^{x}\ (C\neq 0)$$

又$y=0$也为方程的解，故通解为

$$y=C\mathrm{e}^{x}\ (C\in R)$$

安徽理工大学

例2 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$。

解 $\dfrac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$

$$\int\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln C$$

安徽理工大学

故通解为 $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$。

例3 求解初值问题

$$\begin{cases}y'=\sin(x+y+1)\\ y(0)=-1\end{cases}$$

解 令 $u=x+y+1$，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\sin u$。

安徽理工大学

$$\int\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}u}{1+\sin u}=\int\frac{1-\sin u}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$$

$$=\int\sec^2 u\mathrm{d}u-\int\sec u\tan u\mathrm{d}u$$

$$x=\tan u-\sec u+C$$

即 $x=\tan(x+y+1)-\sec(x+y+1)+C$

将 $y(0)=-1$ 代入，得 $C=1$，故初值问题的解为

$$x=\tan(x+y+1)-\sec(x+y+1)+1$$

2. 齐次方程

(1) 若一阶方程 $y'=f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 可写成 y/x 或 x/y 的函数，即 $f(x,y)=\varphi(y/x)$，则称方程为齐次方程。

如 $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$ 可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1+(y/x)^2}{y/x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

即为齐次方程。

(2) 齐次方程可化为可分离变量型方程

对齐次方程，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，即 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

方程变为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$, 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分后即得通解。

例4 解方程 $y'=\dfrac{2y^4+x^4}{xy^3}$ 。

解 令 $u=\dfrac{y}{x}$，则

$$y=ux,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2(y/x)^4+1}{(y/x)^3}=\frac{2u^4+1}{u^3}$$

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2u^4+1}{u^3},\ \frac{u^3\mathrm{d}u}{u^4+1}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{1}{4}\ln(u^4+1)=\ln x+\frac{1}{4}\ln C$$

$$u^4+1=Cx^4$$

故通解为 $x^4+y^4=Cx^8$。

例5 解方程 $2xy\mathrm{d}x+(y^2-x^2)\mathrm{d}y=0$

解 令 $u=\dfrac{y}{x}$，则

$$y=ux,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2y/x}{1-(y/x)^2}=\frac{2u}{1-u^2}$$

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2u}{1-u^2},\ \frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{(1-u^2)\mathrm{d}u}{u+u^3}$$

$$=\frac{(1+u^2)-2u^2}{u+u^3}\mathrm{d}u=\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$\ln x=\ln u-\ln(1+u^2)+\ln C$$

$$x(1+u^2)=Cu$$

故通解为 $x^2+y^2=Cy$。

3. 一阶线性方程

(1) $y'+P(x)y=Q(x)$ 称为一阶线性方程，当 $Q(x)\equiv 0$ 时称为齐次线性方程。

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C$$

故齐次方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$。

(3) 常数变易法

将齐次方程通解中的常数 C 变成函数 $C(x)$，即令

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

则

$$y'=C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\left[-P(x)\right]$$

将 y,y' 代入非齐次方程

$$\left[C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}-C(x)P(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right]+P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$$

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$C(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

故非齐次方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

例6 解方程 $(x^2+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=4x^2$

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2x}{x^2+1}y=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\int\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{4x^2}{x^2+1}\mathrm{e}^{\int\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\ln(x^2+1)}\left(\int\frac{4x^2}{x^2+1}\mathrm{e}^{\ln(x^2+1)}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2+1}\left(\int 4x^2\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{4}{3}x^3+C\right)$$

例7 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y}$。

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y$

$$x=\mathrm{e}^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\mathrm{e}^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\int(-1)dy}\left(\int y\mathrm{e}^{\int(-1)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$= e^{y}\left(\int y e^{-y} dy + C\right)$$

$$= e^{y}\left[-e^{-y}(y+1) + C\right]$$

$$= Ce^{y} - y - 1$$

或 令 $u = x + y$ 后分离变量。

例8 解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$。

解 $\frac{dx}{dy} = \frac{2x - y^2}{y}$, $\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -y$

$$x = e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C\right)$$

$$= e^{-\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy}\left(\int(-y)e^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy}dy + C\right)$$

$$= e^{2\ln y}\left(\int(-y)e^{-2\ln y}dy + C\right)$$

$$= y^2\left(-\int\frac{1}{y}dy + C\right) = y^2(C - \ln y)$$

4. 伯努利方程

$y' + P(x)y = Q(x)y^n \ (n \neq 0,1)$ 称为伯努利方程。

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

令 $z = y^{1-n}$，则

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

方程变为线性方程

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

故通解为

$$z = y^{1-n} = e^{-\int(1-n)P(x)dx}$$

$$\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx + C\right]$$

例9 解方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2y^6$。

解 $n = 6, P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = x^2$

$$y^{1-n} = e^{-\int(1-n)P(x)dx}$$

$$\left[\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx + C\right]$$

$$y^{-5} = e^{5\int\frac{1}{x}dx}\left(\int(-5x^2)e^{-5\int\frac{1}{x}dx}dx + C\right)$$

$$= x^5\left(-5\int\frac{1}{x^3}dx + C\right) = x^5\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + C\right)$$

故通解为

$$x^5y^5\left(\frac{5}{2x^2} + C\right) = 1$$

例10 解方程 $(x^2y^3 + xy)y' = 1$。

解 $\frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2$

$n = 2, P(y) = -y, Q(y) = y^3$

$$x^{1-n} = e^{-\int(1-n)P(y)dy}$$

$$\left[\int(1-n)Q(y)e^{\int(1-n)P(y)dy}dy+C\right]$$

$$x^{-1}=e^{-\int(-1)(-y)dy}$$

$$\left[\int(-1)y^3e^{\int(-1)(-y)dy}dy+C\right]$$

$$=e^{-\frac{y^2}{2}}\left(-\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}dy+C\right)$$

$$=e^{-t}\left(C-2\int te^t dt\right)\left(t=\frac{y^2}{2}\right)$$

$$=e^{-t}\left[C-2(t-1)e^t\right]$$

$$=Ce^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2$$

安徽理工大学
ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§3 可降阶的高阶方程

1. $y''=f(x)$ 型(不含 y,y')

显然，对此类型的方程，积分两次即得通解。

例11 解方程 $y''=\frac{1}{1+x^2}$。

解 $y'=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C_1$

$$y=\int(\arctan x+C_1)dx$$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx+C_1x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$$

2. $y''=f(x,y')$型(不含y)

令$y'=p$，则 $y''=p'$，方程降为一阶方程 $p'=f(x,p)$。设其通解为$p=y'$ $\varphi(x,C_1)$，故原方程通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$$

例12 解方程 $xy''=y'\ln y'$。

解 令$y'=p$，则 $y''=p'$，方程降为一阶可分离变量方程 $xp'=p\ln p$。

$$\frac{dp}{p\ln p}=\frac{dx}{x},\ \ln(\ln p)=\ln x+\ln C_1$$

$$\ln p=C_1x,\ y'=e^{C_1x}$$

故通解为

$$y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x}+C_2$$

例13 求 $xy''+xy'^2-y'=0$ 满足 $y(2)=2, y'(2)=1$ 的特解。

解 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，方程降为一阶方程伯努利方程

$$xp'+xp^2-p=0,\ p'-\frac{1}{x}p=-p^2$$

$$p^{-1}=\mathrm{e}^{-\int(-1)\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}$$

$$\left[\int(-1)(-1)\mathrm{e}^{\int(-1)\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int x\mathrm{d}x+C\right)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$$

由 $p(2)=1$，得 $C=0$，$y'=\frac{2}{x}$，$y=2\ln x+C$。再由 $y(2)=2$，得 $C=2-2\ln 2$，故特解为 $y=2\left(\ln\frac{x}{2}+1\right)$。

3. $y''=f(y,y')$ 型(不含 x)

令 $y'=p$，则

$$y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

方程变为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$。

设其通解为 $p=\varphi(y,C_1)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x$$

故通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$$

例14 解方程 $yy''-y'^2=y^2y'$。

解 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=y^2p$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}p=y$$

$$p=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y}\left(\int y\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C_1\right)$$

$$=y\left(\int y\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}y+C_1\right)=y^2+C_1y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(y+C_1)}=\mathrm{d}x,\ \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+C_1}\right)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

$$\ln\frac{y}{y+C_1}=C_1x+\ln C_2$$

故通解为

$$\frac{y}{y+C_1}=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$$

例15 求 $yy''=y'^2-y'^3$ 满足 $y(1)=1$，$y'(1)=-1$ 的特解。

解 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2-p^3$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p(1-p)}=\frac{\mathrm{d}y}{y},\ \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}\right)\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$\ln\left|\frac{p}{1-p}\right|=\ln y+\ln C,\ \frac{p}{p-1}=Cy$$

由 $p(1)=-1$, 得 $C=\frac{1}{2}$, $\frac{y'}{y'-1}=\frac{y}{2}$

$$y'=\frac{y}{y-2},\ \frac{y-2}{y}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

$$y-2\ln|y|=x+C$$

由 $y(1)=1$, 得 $C=0$, 故特解为

$$y^2=\mathrm{e}^{y-x}$$

例16 解方程 $y''=1+y'^2$。

解 令 $y'=p$, 则 $y''=p'$,

$$p'=1+p^2,\ \frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\mathrm{d}x$$

$$\arctan p=x+C_1$$

$$y'=\tan(x+C_1)$$

故通解为 $y=\ln\sec(x+C_1)+C_2$。

或 用类型3求解。

安徽理工大学 ANHUI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

§4 高阶线性微分方程理论及解法

$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 称为二阶线性方程， $f(x)\equiv 0$ 时称为二阶齐次线性方程。

一、二阶线性微分方程解的结构

1. 二阶齐次线性微分方程解的结构

定理1 若 y_1, y_2 为齐次方程的两个解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 也是齐次方程的解。

证 $y''+Py'+Qy=(C_1y_1+C_2y_2)''$

$$+P(C_1y_1+C_2y_2)'+Q(C_1y_1+C_2y_2)$$

$$=C_1(y_1''+Py_1'+Qy_1)$$

$$+C_2(y_2''+Py_2'+Qy_2)=0$$

注 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 不一定是齐次方程的通解。

定义 对函数 y_1, y_2，若 y_1/y_2 为

常数，则称 y_1, y_2 线性相关，否则称 y_1, y_2 线性无关。

定理2 若 y_1, y_2 为齐次方程两个线性无关的特解，则 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是齐次方程的通解。

2. 二阶非齐次线性微分方程解的结构

定理3 若 y^* 为非齐次方程的特解，Y 为齐次方程的通解，则非齐次线性

方程的通解为 $y = Y + y^*$。

证 $y'' + Py' + Qy = (Y + y^*)''$

$+ P(Y + y^*)' + Q(Y + y^*)$

$= Y'' + PY' + QY +$

$y^{*\prime\prime} + Py^{*\prime} + Qy^* = f(x)$

即 y 为非齐次方程的解，又 Y 中含有两个任意常数，故得证。

定理4 若 y_1^*, y_2^* 分别为 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$, $f_2(x)$ 的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 即为 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解。(叠加定理)

证 $(y_1^* + y_2^*)'' + p(y_1^* + y_2^*)'$

$+ Q(y_1^* + y_2^*)$

$= (y_1^{*\prime\prime} + Py_1^{*\prime} + Qy_1^*) +$

$+ (y_2^{*\prime\prime} + Py_2^{*\prime} + Qy_2^*) = f_1(x) + f_2(x)$

二、二阶常系数齐次线性微分方程

1. $y'' + py' + qy = f(x)$ (p, q 为常数)称为**二阶常系数线性方程**；$f(x) \equiv 0$ 时称为**二阶常系数齐次线性方程**。

2. 因为 $y'' + py' + qy = 0$ 中的系数为常数，且函数 $y = e^{rx}$ 的各阶导数仍然为 Ce^{rx} 形式，故对适当的 r，$y = e^{rx}$

可以成为齐次线性方程的解。

将 $y = e^{rx}$ 代入，

$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0$

得 $r^2 + pr + q = 0$，称为齐次方程的**特征方程**。

3. 特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根不外乎下列三种情况：

(1) 有两个不相等的实根 r_1, r_2，此

时可得两个线性无关的特解 $y = e^{r_1 x}$，$y = e^{r_2 x}$，故通解为

$$Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

(2) 有两个相等的实根 $r_1 = r_2$，此时仅得一个特解 $y_1 = e^{r_1 x}$。

可以求得另一个线性无关的特解 $y_2 = xe^{r_1 x}$，故通解为

$$Y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$$

(3) 有一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，此时 $\tilde{y}_{1,2}=e^{(\alpha\pm i\beta)x}$ 为两个线性无关的特解。由定理1，

$y_1=(\tilde{y}_1+\tilde{y}_2)/2,\ y_2=(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)/(2i)$

也为两个线性无关的特解。

由Euler公式，

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta)$$

可得

$$y_1=\frac{\tilde{y}_1+\tilde{y}_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y_2=\frac{\tilde{y}_1-\tilde{y}_2}{2i}=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

故通解为 $Y=C_1y_1+C_2y_2$

$$=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

例17 解下列微分方程：

(1) $y''-4y'+3y=0$ ；

(2) $y''+2\sqrt{2}y'+2y=0$ ；

(3) $y''+2y'+3y=0$。

解 (1) $r^2-4r+3=0,\ r_1=1,\ r_2=3,$

故通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$。

(2) $r^2+2\sqrt{2}r+2=0,\ r_1=r_2=-\sqrt{2},$

故通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-\sqrt{2}x}$。

(3) $r^2+2r+3=0,\ r_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i,$

故通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$$

4. 对n阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}$$

$$+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

其特征方程为 $r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$ ，通解情况类似。

例18 解下列微分方程：

(1) $y^{(4)}+5y''-36y=0$ ；

(2) $y^{(4)}-6y'''+12y''-8y'=0$ ；

(3) $y^{(4)}+4y''+4y=0$。

解 (1) $r^4+5r^2-36=0,$

$$(r^2-4)(r^2+9)=0,$$

$$r_{1,2}=\pm2,\ r_{3,4}=\pm3i$$

故通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$$

$$+C_3\cos3x+C_4\sin3x$$

(2) $r^4-6r^3+12r^2-8r=0,$

$r(r-2)^3=0, r_1=0,\ r_{2,3,4}=2$

故通解为

$$y=C_1+(C_2+C_3x+C_4x^2)e^{2x}$$

(3) $r^4+4r^2+4=0,(r^2+2)^2=0,$

$r_{1,2}=\sqrt{2}i, r_{3,4}=-\sqrt{2}i$

故通解为 $y=(C_1+C_2x)\cos\sqrt{2}x$

$+(C_3+C_4x)\sin\sqrt{2}x$

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

下面讨论 $y''+py'+qy=f(x)$ 中的 $f(x)$为如下两种类型时特解 y^*的求法。

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型($P_m(x)$为多项式)

根据方程特点，它有特解

$y^*=Q(x)e^{\lambda x}$

其中 $Q(x)$为一待定多项式。

将 y^*代入方程得

$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+$

$(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$ (*)

(1) 若 λ 不是特征方程的根，因为 $P_m(x)$为m次多项式，所以由(*)式知，$Q(x)$也应为m次多项式，故可令

$Q(x)$为一标准多项式 $Q_m(x)$，

$Q_m(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$

其中系数 a_i 待定。

将 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程(此过程相当于将 $Q(x)=Q_m(x)$ 代入(*)式)，用待定系数法求出系数 a_i，即可得 $Q_m(x)$，从而得出特解

$y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$

(2) 若 λ 是特征方程的单根，则

$\lambda^2+p\lambda+q=0, 2\lambda+p\neq0$

(*)式变为

$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)=P_m(x)$ (**)

由(**)式知 $Q'(x)$为m次多项式，即$Q(x)$为m+1次多项式，故可令 $Q(x)=xQ_m(x)$。将 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$代入原方程(此过程相当于将 $Q(x)=xQ_m(x)$代

代入(**)式)，用待定系数法求出系数 a_i，即可得 $Q_m(x)$，从而得出特解

$y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的二重根，则 $\lambda^2+p\lambda+q=0, 2\lambda+p=0$，(*)式变为 $Q''(x)=P_m(x)$ (***)，可见$Q''(x)$为m次多项式，即$Q(x)$为m+2次多项式，故可令 $Q(x)=x^2Q_m(x)$。

将 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程(此过程相当于将 $Q(x)=x^2Q_m(x)$ 代入(***) 式)，用待定系数法求出系数 a_i，即可得 $Q_m(x)$，从而得出特解

$y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结 对 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型，其特解形式为

$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

其中 $Q_m(x)$为与 $P_m(x)$ 同次的标准多项式，而

$$k=\begin{cases}0, \lambda \text{ 不是特征方程的根}\\ 1, \lambda \text{ 是特征方程的单根}\\ 2, \lambda \text{ 是特征方程的二重根}\end{cases}$$

例19 解方程

$$y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=(x^2+1)e^x$$

解 $r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0, r_{1,2}=-1,\frac{1}{2}$

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$$

因 $\lambda=1$ 不是特征方程的根，故令

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}=(ax^2+bx+c)e^x$$

将 y^*代入方程化简得

$$ax^2+(5a+b)x+2a+\frac{5}{2}b+c=x^2+1$$

从而 $a=1, b=-5, c=23/2$，通解为

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}+\left(x^2-5x+\frac{23}{2}\right)e^x$$

例20 求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解。

解 $r^2-2r-3=0, r_{1,2}=-1,3$

因 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，故令 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}=ax+b$。

将 y^*代入方程化简得

$$-3ax-(2a+3b)=3x+1$$

从而 $a=-1, b=1/3$，一特解为

$$y^*=-x+\frac{1}{3}$$

例21 解方程

$$y''-y'-2y=(5-6x)e^{-x}$$

解 $r^2-r-2=0, r_{1,2}=-1,2$

$$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$$

因 $\lambda=-1$ 是特征方程的单根, 故令

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}=x(ax+b)e^{-x}$$

将 y^*代入方程化简得

$$-6ax+(2a-3b)=-6x+5$$

从而 $a=1, b=-1$，通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+(x^2-x)e^{-x}$$

例22 求方程 $y''-3y'=-6x+2$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=-3$的特解.

解 $r^2-3r=0, r_{1,2}=0,3$

$$Y=C_1+C_2e^{3x}$$

因 $\lambda=0$ 是特征方程的单根，故令

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}=x(ax+b)$$

将 y^*代入方程化简得

$$-6ax+(2a-3b)=-6x+2$$

得 $a=1,b=0$，故通解为

$$y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$$

代入初始条件，有

$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2=1\\ y'(0)=3C_2=-3\end{cases},\begin{cases}C_1=2\\ C_2=-1\end{cases}$$

故所求特解为 $y=2-e^{3x}+x^2$。

例23 求方程 $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$

解 $r^2-6r+9=0,r_1=r_2=3$

$$Y=(C_1+C_2x)e^{3x}$$

因$\lambda=3$是特征方程的二重根，故令 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}=x^2(ax+b)e^{3x}$。

将 y^*代入方程化简得

$$6ax+2b=x+1$$

从而 $a=1/6,b=1/2$，通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}$$

例24 求方程

$$y''-4y'+4y=(2x^2+x+1)e^{2x}$$

的一特解。

解 $r^2-4r+4=0,r_1=r_2=2$

因$\lambda=2$是特征方程二重根，故令

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}=x^2(ax^2+bx+c)e^{2x}$$

将 y^*代入方程化简得

$$12ax^2+6bx+2c=2x^2+x+1$$

从而 $a=1/6,b=1/6,c=1/2$，特解为

$$y^*=\left(\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$$

2. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}\cos\omega x\ (\sin\omega x)$型

根据Euler公式

$$e^{(\lambda+i\omega)x}=e^{\lambda x}(\cos\omega x+i\sin\omega x)$$

即 $e^{\lambda x}\cos\omega x,e^{\lambda x}\sin\omega x$分别为 $e^{(\lambda+i\omega)x}$的实、虚部。因此，可先求出1型方程

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}\ (*)$$

的特解 $\bar{y}^*$，然后再取其实部或虚部即得2型方程

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}\cos\omega x(\sin\omega x)$$

的特解 y^*。

由1知，方程(*)的特解为

$$\bar{y}^*=x^kQ_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

其中

$$k=\begin{cases}0,\lambda+i\omega\text{不是特征方程的根}\\ 1,\lambda+i\omega\text{是特征方程的单根}\end{cases}$$

而 $Q_m(x)$为复多项式。不妨令

$$Q_m(x)=Q_{m1}(x)+iQ_{m2}(x)$$

则 $\bar{y}^*=x^k\left[Q_{m1}(x)+iQ_{m2}(x)\right]e^{\lambda x}$

$$(\cos\omega x+i\sin\omega x)$$

$$=x^k\left[Q_{m1}(x)\cos\omega x-\right.$$

$$\left.Q_{m2}(x)\sin\omega x\right]e^{\lambda x}$$

$$+ix^k\left[Q_{m2}(x)\cos\omega x+Q_{m1}(x)\sin\omega x\right]e^{\lambda x}$$

取 $\bar{y}^*$的实部或虚部即得原方程的特解 y^*。

综上所述，类型2的特解可令为

$$y^*=x^k\left[M_m(x)\cos\omega x+N_m(x)\sin\omega x\right]e^{\lambda x}$$

其中

$$k=\begin{cases}0, \lambda+i\omega \text{ 不是特征方程的根}\\ 1, \lambda+i\omega \text{ 是特征方程的单根}\end{cases}$$

$M_m(x), N_m(x)$是与$P_m(x)$同次的待定多项式。

将 y^*代入原方程，用待定系数法求出 $M_m(x), N_m(x)$即可得特解 y^*。

例25 解方程 $y''+4y=\sin 2x$。

解 $r^2+4=0, r_{1,2}=\pm 2i$

$$Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$$

因 $\lambda+i\omega=2i$ 是特征方程的根，故令

$$y^*=x\left[M_0(x)\cos\omega x+N_0(x)\sin\omega x\right]e^{\lambda x}$$
$$=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

将 y^*代入原方程，得

$$4b\cos 2x-4a\sin 2x=\sin 2x,$$

$$a=-1/4, b=0, y^*=-1/4\,x\cos 2x$$

故通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-1/4\,x\cos 2x$$

例26 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一特解。

解 $r^2+1=0, r_{1,2}=\pm i$

因 $\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的根，故令

$$y^*=\left[M_1(x)\cos\omega x+N_1(x)\sin\omega x\right]e^{\lambda x}$$
$$=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$$

将 y^*代入原方程，得

$$(-3ax-3b+4c)\cos 2x-$$
$$(3cx+3d+4a)\sin 2x=x\cos 2x$$

$$\begin{cases}-3a=1\\ -3b+4c=0\\ 3c=0\\ 3d+4a=0\end{cases},\quad\begin{cases}a=-1/3\\ b=c=0\\ d=4/9\end{cases}$$

故一特解为

$$y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

例27 解方程

$$y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$$

解 $r^2-2r+5=0, r_{1,2}=1\pm 2i$

$$Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

因 $\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的单根，故令

$$y^*=x\left[M_0(x)\cos\omega x+N_0(x)\sin\omega x\right]e^{\lambda x}$$

$$=x(a\cos 2x+b\sin 2x)e^x$$

将 y^* 代入原方程，得

$$4b\cos 2x-4a\sin 2x=\cos 2x,$$

$$a=0, b=1/4, y^*=1/4\,xe^x\sin 2x$$

故通解为

$$y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{4}xe^x\sin 2x$$