第 1 次作业　函数及其几种特性

1. 下列各式中的 y 是否为 x 的单值函数，为什么？

(1) $y^3=x$；(2) $x=\sin y$.

解 (1) 是，因为对应的 y 唯一；

(2) 否，因为对应的 y 不唯一.

2. 下列各对函数是否相同？说明理由.

(1) $f(x)=x\operatorname{sgn}x,\ g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{2\ln x},\ g(x)=(\sqrt{x})^4$.

解 (1) 是，因为定义域和对应关系均相同；

(2) 否，因为定义域不同.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$，求：

(1) $f(\ln x)$ 的定义域；

(2) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域显然为 $2<x<3$.

(1) 由 $2<\ln x<3$ 易解得 $f(\ln x)$ 的定义域为 $(\mathrm{e}^2,\mathrm{e}^3)$.

(2) 令 $\begin{cases}2<x+a<3,\\ 2<x-a<3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2-a<x<3-a,\\ 2+a<x<3+a,\end{cases}$ 故 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时定义域为 $(2+a,3-a)$；$a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时定义域为为 $\varnothing$.

4. 设 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$，求 $f(x)$.

解 将 x 替换为 $\dfrac{1}{x}$，得 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=\dfrac{1+2x}{x+x^2}$，联立解得，$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

5*. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

证 对任意 $M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，则 $\left|f(x_0)\right|=\dfrac{1}{\sin x_0}>\dfrac{1}{x_0}=M+1>M$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界.

6. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，且 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证 设 $0<x_1<x_2<l$，则 $-l<-x_2<-x_1<0$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(x_1)<f(x_2)$. 又 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 内为奇函数，得 $-f(-x_1)<-f(-x_2)$，即 $f(-x_2)<f(-x_1)$，从而 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

7. 判别 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

8. 求函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数.

解 由 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，得 $x+\sqrt{x^2+1}=a^y$.

又 $y=-\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$，得 $\sqrt{x^2+1}-x=a^{-y}$.

从而， $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $x=\dfrac{a^y-a^{-y}}{2}$，即 $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\geqslant 1,\\ x^2, & |x|<1,\end{cases}$ $g(x)=\lg x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}\lg x, & |\lg x|\geqslant 1,\\ \lg^2 x, & |\lg x|<1\end{cases}=\begin{cases}\lg x, & x\leqslant 1/10 \text{ 或 } x\geqslant 10,\\ \lg^2 x, & \dfrac{1}{10}<x<10;\end{cases}$

$g[f(x)]=\lg[f(x)]=\begin{cases}\lg x, & x\geqslant 1,\\ \lg x^2, & -1<x<0 \text{ 或 } 0<x<1.\end{cases}$.

第 2 次作业　初等函数(反三角函数)　参数方程与极坐标

2. 将下列乘积化为和、差

(1) $\sin x\sin 2y$；(2) $\sin 2x\cos 3y$.

解 (1) $\sin x\sin 2y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+2y)-\cos(x-2y)]$；

(2) $\sin 2x\cos 3y=\dfrac{1}{2}[\sin(2x+3y)+\sin(2x-3y)]$.

3. 将下列和、差化为乘积

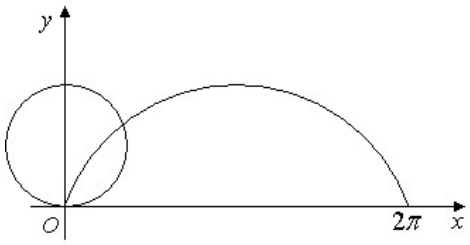
(1) $\sin 4x+\sin 3y$；(2) $\cos 2x-\cos 3y$.

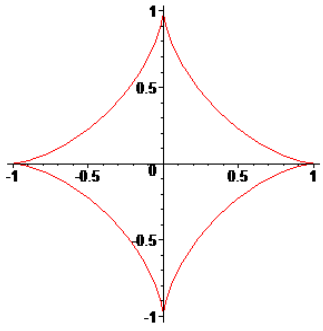
解 (1) $\sin 4x+\sin 3y=2\sin\dfrac{4x+3y}{2}\cos\dfrac{4x-3y}{2}$；

(2) $\cos 2x-\cos 3y=-2\sin\dfrac{2x+3y}{2}\sin\dfrac{2x-3y}{2}$.

4. (1) 做出曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 的图形；(2) 将 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 化为参数方程，并做图.

解 (2) $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t.\end{cases}$

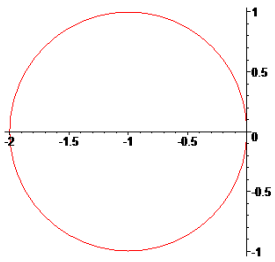


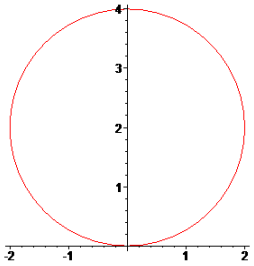


5. 将下列方程化为极坐标方程，并做图.

(1) $(x+1)^2+y^2=1$；(2) $x^2+(y-2)^2=4$.

解 (1) $r=-2\cos\theta$；(2) $r=4\sin\theta$.

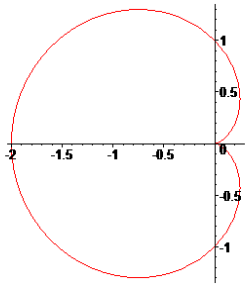


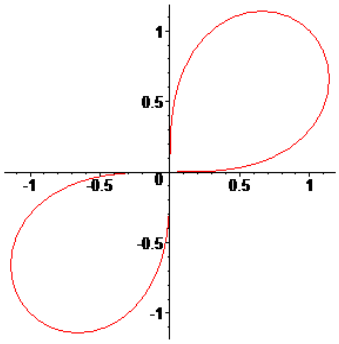


6. 做出下列曲线的图形：

(1) $r=a(1-\cos\theta)$；(2) $r^2=2\sin 2\theta$.

解





第 3 次作业　数列极限

1. 根据数列极限定义证明下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n-1}=\dfrac{3}{4}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$.

解 (1) $|x_n-a|=\left|\dfrac{3n+1}{4n-1}-\dfrac{3}{4}\right|=\dfrac{7}{4(4n-1)}<\dfrac{7}{n}<\varepsilon$，得 $N=\left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]$.

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{7}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{3n+1}{4n-1}-\dfrac{3}{4}\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n-1}=\dfrac{3}{4}$.

(2) $|x_n-a|=\left|\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n-0\right|<\dfrac{2}{n}<\varepsilon$，得 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$.

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n-0\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$.

2^*. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明 $x_n\to a\,(n\to\infty)$.

证 因为 $x_{2k-1}\to a\ (k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N_1,N_2>0$，当 $2k-1>N_1$、$2k>N_2$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$、$|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则对任意 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，故 $x_n\to a\,(n\to\infty)$.

第 4 次作业　函数极限

1. 根据函数极限定义证明下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$；(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

解 (1) $|f(x)-A|=\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}-(-6)\right|=|x+3|<\varepsilon$，得 $\delta=\varepsilon$.

对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x+3|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}-(-6)\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$.

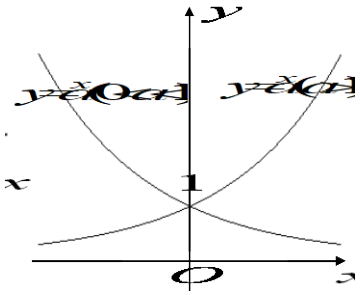
(2) $|f(x)-A|=\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，$x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，得 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

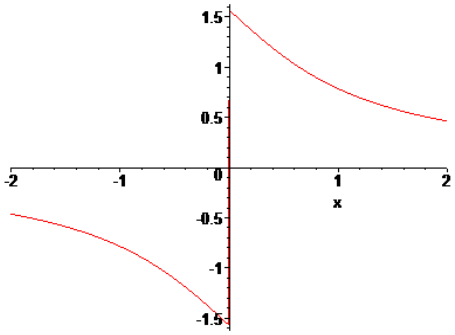
对任意 $\varepsilon>0$，存在 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当 $x>X$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

2. 根据图形讨论 $f(x)=a^x$ 在(1) $a>1$ 和(2) $0<a<1$ 条件下 $x\to-\infty, x\to+\infty, x\to\infty$ 时的极限.

解 (1) $a>1$ 时，当 $x\to-\infty, x\to+\infty, x\to\infty$ 极限分别为：0，$+\infty$，不存在；

(2) $0<a<1$ 时，当 $x\to-\infty, x\to+\infty, x\to\infty$ 极限分别为：$+\infty$，0，不存在.





3. 根据图形和左右极限讨论 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$ 不存在.

4. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+a, & x>0\\ \mathrm{e}^x, & x<0\end{cases}$ 在 $x\to 0$ 时极限存在，求常数 a 的值.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+a)=a$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^x=1$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限存在，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，即 $a=1$.

第 5 次作业　无穷小与无穷大　极限运算法则

1. 下列函数在什么情况下是无穷小，什么情况下是无穷大？

(1) $\dfrac{x+2}{x^2}$；(2) $2^{\frac{1}{x}}-1$；(3) $\ln(1+x)$；(4) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$.

解 (1) $\dfrac{x+2}{x^2}$ 当 $x\to -2,\infty$ 时为无穷小；$x\to 0$ 时为无穷大.

(2) $2^{\frac{1}{x}}-1$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小；$x\to 0^+$ 为无穷大.

(3) $\ln(1+x)$ 当 $x\to 0$ 时为无穷小；$x\to -1^+,+\infty$ 为无穷大.

(4) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小； $x\to1$ 为无穷大.

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arccot}x}{x}$；(3) $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 为无穷小，而 $\cos x$ 有界，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}=0$.

(2) $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小，而 $\operatorname{arccot}x$ 有界，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arccot}x}{x}=0$.

(3) $x\to0^+$ 时，$\dfrac{1}{x}\to+\infty$，$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\to+\infty$；$x\to0^-$ 时，$\dfrac{1}{x}\to-\infty$，$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\to0$，故 $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

3^*. 证明：函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界，但当 $x\to0^+$ 时，此函数不是无穷大.

证 对任意 $M>0$，只要取

$$x_0=\frac{1}{\left([M]+\dfrac{1}{2}\right)\pi}\in(0,1],$$

则 $\left|f(x_0)\right|=\left([M]+\dfrac{1}{2}\right)\pi>M$，所以函数在 $(0,1]$ 上无界.

又对任意 $M,\delta>0$，总能取到正整数 n，使得 $x_1=\dfrac{1}{2n\pi}\in(0,\delta)$，且 $\left|f(x_1)\right|=0<M$.

由无穷大定义，$x\to0^+$ 时，函数不是无穷大.

4. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x(x+1)}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{[1+(x-1)]^{1/3}-1}{[1+(x-1)]^{1/2}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{3}(x-1)}{\frac{1}{2}(x-1)}=\dfrac{2}{3}$；

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\overset{x-1=t}{=\!=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+t}-1}{\sqrt{1+t}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{3}t}{\frac{1}{2}t}=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-4x+1}=\infty$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}=0\left(\dfrac{n}{n^2+1}\to0,\left|\sin(n!)\right|\leqslant1\right)$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-3x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}=\dfrac{1}{2}$；

$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+1/x^2}+1}=\infty$；

从而，原极限不存在.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})\ (|x|<1)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+5^n}{(-3)^{n+1}+5^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^n+1}{(-3)\left(-\frac{3}{5}\right)^n+5}=\frac{1}{5}$.

5. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$，求 α,β.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x+1-\beta}{x+1}=0$，得 $\begin{cases}1-\alpha=0\\ \alpha+\beta=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1\end{cases}$.

第 6 次作业　极限存在法则　无穷小的比较

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$.

解 (1) $\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\leqslant\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

故原式 $=\frac{1}{2}$.

(2) $3<\sqrt[n]{2^n+3^n}=3\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}<3\cdot 2^{\frac{1}{n}}\to 3$，故由夹逼准则，原式=3.

2*. 求数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n},\cdots$ 的极限.

解 令 $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}$，则 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$.

$x_1=2,x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},x_2>x_1$，设 $x_n>x_{n-1}$，则 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}>0$，得 $x_{n+1}>x_n$，即 x_n 单增.

又 $x_1=2,x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}<2$，设 $x_{n-1}<2$，则 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<2$，得 $x_n<2$，即 x_n 有上界.

由单调有界准则，x_n 有极限 x，从而可在 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 两边取极限，得 $x=\sqrt{2+x}$，$x=2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^m)}{\sin^n x}$（$m$, n 为正整数）$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^m}{x^n}=\begin{cases}0, & m>n\\ 1, & m=n\\ \infty, & m<n\end{cases}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{\sin 2x}{x}}{1+\dfrac{\sin 5x}{x}}=-\dfrac{1}{6}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt[3]{1+x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x\cdot\dfrac{1}{3}x}=\dfrac{3}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\arctan 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\tan 2x}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x$；(2) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-2x}$.

解 (1) 原式= $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2-1}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}}=1$；

(2) 原式= $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+(-2x)\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-2}$.

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求常数 a.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8$，$a=\dfrac{1}{3}\ln 8=\ln 2$.

6. 当 $x\to0$ 时，求正整数 n，使 $(1+x^n)^{1/3}-1$ 为 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 的高阶无穷小但为 $x^2\ln(1+x^2)$ 的低阶无穷小.

解 由题意，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x^n)^{\frac{1}{3}}-1}{e^{x^2}-1}=0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\ln(1+x^2)}{(1+x^n)^{\frac{1}{3}}-1}=0$. 由等价无穷小代换原理，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x^n)^{\frac{1}{3}}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^n}{x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}x^{n-2}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\ln(1+x^2)}{(1+x^n)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot x^2}{\frac{1}{3}x^n}=3\lim\limits_{x\to0}x^{4-n}$，

故 $n-2>0,\ 4-n>0$，即 $n=3$.

第 7 次作业　函数的连续性　连续函数的性质

1. 求下列函数的间断点，并指出其类型：

(1) $f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$；(2) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$；(3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}\sin\dfrac{1}{x}$；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$；(5) $f(x)=\dfrac{x-2}{\ln|1-x|}$.

解 (1) 间断点为 $x=0$. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sin x\sin\dfrac{1}{x}=0$，而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处无定义，故点 $x=0$ 为可去间断点.

(2) 令分母 $\tan x=0$，解得 $x=k\pi$，此外分母 $\tan x$ 在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathrm{Z})$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$，$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty\ (k\neq0)$，$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$，

从而，$x=0$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathrm{Z})$ 均为可去间断点，$x=k\pi(k\neq0)$ 为无穷间断点.

(3) 间断点为 $x=0$，$x=1$，$x=-3$. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+3}\sin\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sin1}{4}$，

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{x+3}\sin\dfrac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x+3}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在也不是 ∞，故 $x=1$ 为可去间断点，$x=-3$ 为无穷间断点，$x=0$ 为第二类振荡间断点.

(4) 间断点为 $x=0$，$x=1$. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}=0\neq\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}=1$，

故 $x=0$ 为无穷间断点，$x=1$ 为跳跃间断点.

(5) 令 $\ln|1-x|=0$ 解得 $x=0$，$x=2$，又 $x=1$ 处函数无定义.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-2}{\ln|1-x|}=\infty$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\ln|1-x|}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\ln(x-1)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\ln(1+x-2)}=1$，

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{\ln|1-x|}=0$，故 $x=0$ 为无穷间断点，$x=1$，$x=2$ 为可去间断点.

2. 求 a,b 的值，使下列函数为连续函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0\\ a, & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}.$$

解 当 $x\neq0$ 时，$f(x)$ 为初等函数，连续. 当 $x=0$ 时，

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\sin x=1,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x\sin\frac{1}{x}+b\right)=b.$$

要使函数连续，则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，即 $a=b=1$.

3*. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判断其类型.

解 当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=x$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-2n}-1}{x^{-2n}+1}x=-x$；

当 $|x|=1$ 时，$f(x)=0$；从而 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -x, & |x|>1\end{cases}$，$x=1$，$x=-1$ 为第一类跳跃间断点.

4. 证明方程 $x^5-3x+1=0$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证 令 $f(x)=x^5-3x+1$，显然 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=-1<0$，$f(2)>0$，故由零点定理知，

存在$\xi\in(1,2)$，使得$f(\xi)=0$.

5. 若$f(x)\in C[a,b]$，$a<x_1<\cdots<x_n<b$，则在$[x_1,x_n]$上必存在ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证 因$f(x)\in C[x_1,x_n]$，由最值定理，$f(x)$在$[x_1,x_n]$上有最大值M、最小值m.

由$m\leqslant f(x_i)\leqslant M$，得$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$.

根据介值定理，至少有一$\xi\in[x_1,x_n]$，使$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

第 8 次作业　导数的概念

1. 若$f'(x_0)$存在，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$，$f(0)=0$，且$f'(0)$存在.

解 (1) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$

$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$.

2. 如果$f(x)$为偶函数，且$f'(0)$存在，证明$f'(0)=0$.

证 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=-f'(0)$，得$2f'(0)=0$，故$f'(0)=0$.

3. 设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，计算$f'(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x+1)(x+2)\cdots(x+n)=n!$.

4. $f(x)=\max\{x,x^2\},x\in(0,2)$，求$f'(x)$.

解 $0<x<1,y=x,y'=1;1<x<2,y=x^2,y'=2x$.

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$, $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1-}\frac{x-1}{x-1}=1$，$f'(1)$不存在，故$f'(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 2x, & 1<x<2\end{cases}$.

5. 讨论函数$y=\sqrt[3]{x^2}$在$x=0$处的连续性与可导性.

解 因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x^2}=0=f(0)$，所以函数在$x=0$连续.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{-\frac{1}{3}}=\infty$，故函数在$x=0$不可导.

6. 讨论$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$在$x=0$处的连续性、可导性.

解 在$x=0$处，$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=(\Delta x)^2\cos\frac{1}{\Delta x}$.

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}(\Delta x)^2\cos\frac{1}{\Delta x}=0$，故$f(x)$在$x=0$处连续.

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x}=0$，故$f(x)$在$x=0$处可导.

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，求 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

解 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，故 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b=f(1)=1$.

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，得 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(ax+b)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$，故 $a=2$，从而 $b=-1$.

8. 求曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线和法线方程.

解 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

切线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，法线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

第 9 次作业　导数运算法则　高阶导数

1. 计算下列导数：

(1) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$；

解 $y'=\dfrac{(\cos x-\cos x+x\sin x)(\cos x+x\sin x)-(\sin x-x\cos x)(-\sin x+\sin x+x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}$

$=\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$.

(2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$；

解 $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(3) $y=\dfrac{2\csc x}{1+x^2}$；

解 $y'=\dfrac{-2\csc x\cdot\cot x\cdot(1+x^2)-2\csc x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{2\csc x[(1+x^2)\cot x+2x]}{(1+x^2)^2}$.

(4) $y=\dfrac{\cot x}{1+\sqrt{x}}$；

解 $y'=\dfrac{-\csc^2 x\cdot(1+\sqrt{x})-\cot x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=-\dfrac{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\csc^2 x+\cot x}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

(5) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$；

解 $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}\cdot\dfrac{-1}{x^2}=\dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(6) $y=\arctan \mathrm{e}^x$；

解 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

(7) $y=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$；

解 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$.

(8) $y=f^2(\mathrm{e}^x)$， f 可导.

解 $y'=2f(\mathrm{e}^x)\cdot f'(\mathrm{e}^x)\cdot\mathrm{e}^x$.

(9) $y=\ln\sec 3x$；

解 $y'=\dfrac{1}{\sec 3x}\cdot\sec 3x\cdot\tan 3x\cdot 3=3\tan 3x$.

(10) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$

解 $y'=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos 3x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(-\sin 3x)\cdot 3=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x+6\sin 3x)$.

(11) $y=\ln\left[\ln\left(\ln x\right)\right]$；

解 $y'=\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)}$.

(12) $y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$；

解 $y'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2/4}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(13) $y=\arcsin\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$；

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x(1-\mathrm{e}^{2\sqrt{x}})}}$.

(14) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}$；

解 $y'=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-2\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(15) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$；

解 $y'=2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\cdot\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$.

(16) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\ln\tan x$.

解 $y'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\cdot\ln\tan x-\cos x\cdot\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}=\dfrac{1}{\sin x}+\sin x\cdot\ln\tan x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin x\cdot\ln\tan x$.

2. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$； (2) $y=x^2f(\sin x)$， 其中 f 二阶可导.

解 (1) $y'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$，$y''=-\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

(2) $y'=2xf(\sin x)+x^2 f'(\sin x)\cos x$，

$y''=2f(\sin x)+2xf'(\sin x)\cos x+2xf'(\sin x)\cos x+x^2 f''(\sin x)\cos^2 x-x^2 f'(\sin x)\sin x$

$=2f(\sin x)+(4x\cos x-x^2\sin x)f'(\sin x)+x^2\cos^2 x\cdot f''(\sin x)$.

3*. 已知 $y=f(x)$ 的导数 y'，求其反函数的一阶和二阶导数.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{y'}$；$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\dfrac{y''}{(y')^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

4. $y=\mathrm{e}^x(x^2+2x+2)$，求 $y^{(20)}$.

解 设 $u=\mathrm{e}^x, v=x^2+2x+2$，则 $u^{(20)}=u^{(19)}=u^{(18)}=\mathrm{e}^x, v'=2x+2, v''=2$.

由莱布尼兹公式，

$y^{(20)}=u^{(20)}v+20u^{(19)}v'+\dfrac{20\times 19}{2}u^{(18)}v''=\mathrm{e}^x\left[(x^2+2x+2)+20(2x+2)+190\times 2\right]$

$=\mathrm{e}^x(x^2+42x+422)$.

第 10 次作业　隐函数求导　参变量函数求导

1. 求下列方程所确定的隐函数的导数：

(1) $y=1-x\mathrm{e}^y$，求 y'；

(2) $\mathrm{e}^{xy}+y\ln x=\cos 2x$，求 y'；

(3) $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$，求 $y''(0)$.

解 (1) 两边对 x 求导，$y'=-\mathrm{e}^y-x\mathrm{e}^y y'$，故 $y'=\dfrac{-\mathrm{e}^y}{1+x\mathrm{e}^y}=\dfrac{\mathrm{e}^y}{y-2}$.

(2) 两边对 x 求导，$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')+y'\ln x+\dfrac{y}{x}=-2\sin 2x$，故 $y'=-\dfrac{xy\mathrm{e}^{xy}+y+2x\sin 2x}{x(x\mathrm{e}^{xy}+\ln x)}$.

(3) $\mathrm{e}^y y'+6y+6xy'+2x=0$，$\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''+6y'+6y'+6xy''+2=0$.

令 $x=0$，得 $y=0, y'=0$，从而 $y''(0)=-2$.

2. 求曲线 $x^3+y^3-3xy=0$ 在 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ 处的切线方程.

解 对等式 $x^3+y^3-3xy=0$ 两边关于 x 求导，可得 $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$.

将点 $\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right)$ 代入可得 $y'|_{(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})}=0$，因而所求切线方程为 $y=\sqrt[3]{4}$，法线方程为 $x=\sqrt[3]{2}$.

3. 求下列函数的一阶导数：

(1) $y=x\cdot(\sin x)^{\cos x}$；(2) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2-2}}}$.

解 (1) $\ln y=\ln x+\cos x\ln\sin x$，$\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{x}-\sin x\ln\sin x+\cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$，

$$y'=y\cdot\left(\frac{1}{x}-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

(2) $\ln y=\frac{1}{5}\left[\ln(x-5)-\frac{1}{5}\ln\left(x^2+2\right)\right]$，$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{5(x^2+2)}\right]$，故

$$y'=\frac{y}{5}\left[\frac{1}{x-5}-\frac{2x}{5(x^2+2)}\right].$$

4. 求曲线$\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$在$t=2$时的切线.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\dfrac{(1+t^2)\cdot 6at-3at^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{(1+t^2)\cdot 3a-3at\cdot 2t}{(1+t^2)^2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=-\dfrac{4}{3}$.

当$t=2$时，$x=\frac{6a}{5},y=\frac{12a}{5}$，故切线方程为$y-\frac{12a}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{6a}{5}\right)$，即$4x+3y-12a=0$.

5. 求下列参变量函数的二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$：

(1) $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2}\\ y=1-t\end{cases}$；(2) $\begin{cases}x=3\mathrm{e}^{-t}\\ y=2\mathrm{e}^{t}\end{cases}$.

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\frac{1}{t^2}}{t}=\dfrac{1}{t^3}$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{2\mathrm{e}^{t}}{-3\mathrm{e}^{-t}}=-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{2t}}{-3\mathrm{e}^{-t}}=\dfrac{4}{9}\mathrm{e}^{3t}$.

第 11 次作业　函数的微分

1. 已知$y=x^3-x$，计算在$x=2$处当Δx分别等于 1,0.1 时的Δy及$\mathrm{d}y$值；

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-(x^3-x)=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-\Delta x$，$\mathrm{d}y=(3x^2-1)\Delta x$.

当$\Delta x=1$时，$\Delta y=18$，$\mathrm{d}y=11$；当$\Delta x=0.1$时，$\Delta y=1.161$，$\mathrm{d}y=1.1$.

2. 求下列函数的微分：

(1) $y=\arctan\dfrac{a}{x}+\ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$；(2) $y=x^{\arcsin x}$；(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) $y'=\dfrac{-\frac{a}{x^2}}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)=\dfrac{-a}{x^2+a^2}+\dfrac{a}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^3}{x^4-a^4}$，故$\mathrm{d}y=\dfrac{2a^3}{x^4-a^4}\mathrm{d}x$.

(2) $\ln y=\arcsin x\cdot\ln x$，$y'=y\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}\right)$，故$\mathrm{d}y=y\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}\right)\mathrm{d}x$.

(3) $\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\mathrm{d}x=(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$.

3. 设球壳的内直径为D，厚度为h，求其体积的近似值.

解 $V=\dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{D}{2}\right)^3=\dfrac{1}{6}\pi D^3$，$\Delta V\approx \mathrm{d}V=\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}D}\Delta D=\dfrac{1}{2}\pi D^2\cdot 2h=\pi D^2 h$.

4. 设扇形半径 $R=100\mathrm{cm}$，圆心角 $\alpha=60^\circ$. 若：(1) 半径增加1cm, α 不变；(2) α 减少 $30'$，R 不变，问扇形面积各近似改变多少？

解 (1) 扇形面积 $S(R)=\dfrac{1}{2}aR^2$，则

$$\Delta S=S(R+\Delta R)-S(R)\approx S'(R)\mathrm{d}R=aR\mathrm{d}R=\frac{\pi}{3}\cdot 100\cdot 1\approx 104.72(\mathrm{cm})^2.$$

(2) 扇形面积 $S(\alpha)=\dfrac{1}{2}aR^2$，则

$$\Delta S=S(\alpha+\Delta\alpha)-S(\alpha)\approx S'(\alpha)\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\cdot 100^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\right)\approx -43.63(\mathrm{cm})^2.$$

第 12 次作业　微分中值定理

1. 不求 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

解 因为 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$，故由罗尔定理知，方程 $f'(x)=0$ 有 3 个实根，分别位于 $(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$ 内.

2. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 x_0，证明方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

证 令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$，则 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，在 $(0,x_0)$ 内可导，且 $f(0)=f(x_0)$，故由罗尔定理知，在 $(0,x_0)$ 内存在 ζ，使得 $f'(\zeta)=a_0n\zeta^{n-1}+a_1(n-1)\zeta^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$，从而结论成立.

3. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $a<x_1<x_2<x_3<b$，其中 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$. 证明：存在 $\gamma\in(x_1,x_3)$，使得 $f''(\gamma)=0$.

证 由题意知，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ 上连续，在 $(x_1,x_2),(x_2,x_3)$ 内可导，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，故由罗尔定理知，在 (x_1,x_2) 内存在 ζ_1，在 (x_2,x_3) 内存在 ζ_2，使得 $f'(\zeta_1)=f'(\zeta_2)=0$.

又 $f(x)$ 二阶可导，自然 $f'(x)$ 在 $[\zeta_1,\zeta_2]$ 上连续，在 (ζ_1,ζ_2) 内可导，且 $f'(\zeta_1)=f'(\zeta_2)$，由罗尔定理知，在 $(\zeta_1,\zeta_2)\subseteq(x_1,x_3)$ 内存在 γ，使得 $f''(\gamma)=0$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{(a+b)f'(\eta)}{2\eta}.$$

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，所以由拉格朗日定理，有

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(a+b)\overset{\text{柯西定理}}{=\!=}\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b).$$

5. 若 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f(x),\ f(0)=1$，证明：$f(x)=\mathrm{e}^x$.

证 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$，则 $F(x)=f'(x)\mathrm{e}^{-x}-f(x)\mathrm{e}^{-x}=0$，$F(x)\equiv C$.

由 $f(0)=1$，得 $C=F(0)=1$，故 $F(x)\equiv 1$，即 $f(x)=\mathrm{e}^x$.